

Gráfelmélet

Definíciók:

Def.: Gráf: Gráfnak (G) nevezzük pontok (V) és élek (E) azon halmazát, ahol az élek pontokat kötnek össze.

Def.: Csúcs: A (V) halmaz elemeit, azaz a pontokat, a gráf csúcsainak nevezzük, $V(G) = \{v_1; v_2; v_3; v_4; v_5, \dots v_n\}$.

Def.: Él: Az E halmaz elemeit a gráf elemeinek nevezzük.

$$E(G) = \{e_1 = (v_1, v_2); e_2 = (v_1, v_3); e_3 = \dots e_k = (v_{n-1}, v_n)\}.$$

$$(E \subseteq V \times V)$$

Def.: Irányított gráf: Irányított gráfok esetében számít a csúcsok sorrendje, azaz $e_1 = (v_1, v_2)$ és $e_2 = (v_2, v_1)$ különböznek, az is lehet, hogy csak egyikük létezik.

Def.: Irányítatlan gráf: Irányítatlan gráfok esetében nincs jelentősége az élek sorrendjének, tehát $e_1 = (v_1, v_2)$ és $e_2 = (v_2, v_1)$ ugyanazt az élt jelöli.

Def.: Hurokél: Egy e élt hurokélnek nevezünk, ha az él két végpontja megegyezik, pl.: $e = (v_1, v_1)$

Def.: Többszörös él: Az e és f éleket párhuzamosnak nevezzük, ha végpontjaik megegyeznek.

Def.: Fokszám: Egy gráf valamely csúcsának fokszáma az adott csúcsból kiinduló élek száma.

Def.: Séta: Csatlakozó élek sorozata.

Def.: Vonal: Csatlakozó élek olyan sorozata, melyben az élek nem ismétlődnek.

Def.: Út: Csatlakozó élek olyan sorozata, melyben a csúcsok nem ismétlődnek (ekkor az élek közt sincs ismétlődés).

Def.: Kör: Olyan út melynek végpontjai megegyeznek.

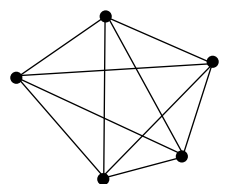
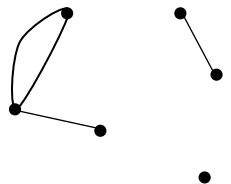
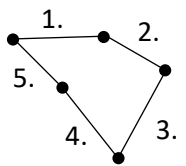
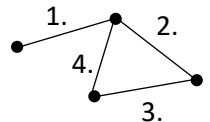
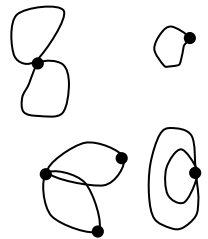
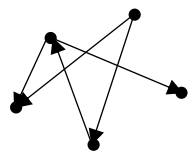
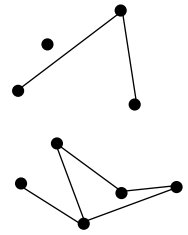
Def.: Egyszerű gráf: Olyan gráf, melyben nincs hurok él és nincs többszörös él.

Def.: Összefüggő gráf: Olyan gráf melynek bármely pontjából bármely pontjába eljuthatunk valamilyen úton.

Def.: Komponensek: Ha egy gráf nem összefüggő, akkor a maximális összefüggő részeit komponenseknek nevezzük. A komponensek a gráf „lehető legbővebb” részgráfjai.

Def.: Izolált csúcs: v csúcs izolált, ha v fokszáma 0.

Def.: Teljes gráf.: A teljes gráf olyan összefüggő gráf, melynek minden pontja minden ponttal össze van kötve.



Def.: *D*-reguláris gráf: Egy gráfot *d*-regulárisnak nevezünk, ha minden csúcsának foka *d*.

Def.: Reguláris gráf: Egy gráfot regulárisnak nevezünk, ha valamely *d*-re reguláris.

Def.: Minimálisan összefüggő: Ha bármely élét elhagyva már nem összefüggő.

Def.: Maximális körmentes: ha nincs benne kör, de bármely élt hozzáadva már lenne benne.

Def.: Fagráf: *G* gráfot fának nevezzük, ha az minimálisan összefüggő.

- Az *n* pontú gráf éleinek száma $n - 1$. (Az egyetlen pontból álló gráf is fa.)
- Egy fa bármely két pontját pontosan egy út köti össze.
- Ha egy fa valamely élét elhagyjuk, akkor a kapott gráf nem lesz összefüggő (az élek végpontjait nem hagyjuk el).

Ha egy fa legalább kétpontú, akkor van elsőfokú pontja.

Ha egy *n* pontú összefüggő gráfban *n*-nél kevesebb él van, akkor a gráf tartalmaz elsőfokú pontot.

Ha egy gráf két pontja között több út is megadható, akkor a gráfban van kör.

Ha egy összefüggő gráf tartalmaz kört, és a kör egy tetszőleges élét elhagyjuk, akkor a gráf összefüggő marad.

Ha egy fa valamely két pontja között nincs él, akkor ezt az élt behúzva a gráfban keletkezik kör.

Ha egy gráfban minden pont foka legalább kettő, akkor a gráfban van kör.

Ha egy *n* pontú gráf éleinek száma *n*, akkor a gráfban van kör.

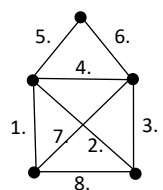
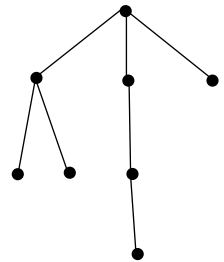
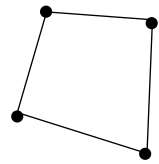
Véges, egynél több csúcsú fában legalább két elsőfokú csúcs van.

Def.: Erdő: Olyan gráf melynek komponensei fák.

Def.: Síkgráf: Egy gráfot síkgráfnak nevezünk, ha lerajzolható a síkba úgy, hogy az élei (melyek esetleg görbe vonalak) csak a csúcsokban találkoznak, nem metszik egymást belső pontban. Egy síkgráf élei által határolt területeket a síkgráf tartományainak nevezzük. (A sík helyett tetszőlegesfelülettel lehetne dolgozni, így értelme van például gömbre vagy tóruszra rajzolt gráfokról és az azokon keletkező tartományokról beszélni is.)

Def.: Euler-vonal: Egy olyan vonalat, mely a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza, Euler-vonalnak nevezzük. Ha a vonal zárt akkor zárt Euler-vonalnak nevezzük.

Legyen *G* egy izolált pont nélküli gráf. Ekkor *G*-ben pontosan akkor van zárt Euler-vonal, ha összefüggő és minden foka páros vagy *G*-ben pontosan akkor van Euler-vonal, ha összefüggő és legfeljebb két darab páratlan fokú csúcsa van.



Def.: Hamilton-út, Hamilton-kör: Ha egy gráfban egy út minden csúcson átmegy, akkor azt Hamilton-útnak nevezzük. Ha egy gráfban egy kör minden csúcson átmegy, akkor Hamilton- körnek nevezzük.

Def.: Gráf színezési (kromatikus) száma: Legyen G egy síkgráf, melynek tartományait színezzük be úgy, hogy az egymással él által elválasztott tartományok különböző színűek. A szükséges színek minimális számát a G gráf színezési számának (kromatikus számának, $\chi(G)$) nevezzük.

Tételek:

Tétel: Fokszámtétel: Bármely véges gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese (azaz páros szám).

Következmény: Bármely véges gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

Tétel: Az n pontú teljes gráf éleinek száma $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.

Bizonyítás: Vegyünk egy K_n teljes gráfot. K_n minden csúcsának fokszáma $n - 1$ mivel minden csúcsa minden csúcsával össze van kötve, tehát K_n teljesgráf csúcsainak fokszámának összege $n \cdot (n - 1)$. Fokszámtételből tudjuk, hogy bármely véges gráfban a pontok fokszámának összege az élek számának kétszerese. Ebből az következik, hogy K_n teljes gráf éleinek száma $\frac{n \cdot (n - 1)}{2}$.

Tétel: Dirac tétele: Ha egy n pontú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor van benne Hamilton-út.

Ha egy $n \geq 3$ pontú egyszerű gráf minden csúcsának fokszáma legalább $\frac{n}{2}$, akkor van benne Hamilton-kör.

Tétel: Euler-tétel: Legyen G egy olyan síkgráf, melynek n csúcsa, e éle és t tartománya van. Ekkor $n + t = e + 2$.

Tétel: Síkgráfban van olyan csúcs, melynek fokszáma ≤ 5 .

[Tétel: n csúcsú síkgráf színezéséhez n szín kell.]

[Tétel: n csúcsú síkgráf színezéséhez 6 szín kell. (Hatszínítétel)]

[Tétel: n csúcsú síkgráf színezéséhez 5 szín kell. (Ötszínítétel)]

Tétel: n csúcsú síkgráf színezéséhez 4 szín kell. (Négyszínítétel) (Érdekesség/matematika történet Kempe bizonyítása és annak hibája)

Általános érdekességek:

Probléma: Moser-körprobléma: Körvonalon vegyünk fel n pontot. Ha ezek egy teljes gráfot adnak meg, hány részre bontják a körlapot?

Magyar vonatkozások:

- Turán Pál (Turángráf probléma)
- Lovász László (Ábel-díj, gráfelméleti problémák)
- Gyárfás András (Gyárfás-Sumner sejtés)
- Erdős Pál (Rendeteg gráfelméleti probléma, Erdős szám)
- Hajnal András (Erdőssel közös munkássága)

Alkalmazások:

- Adat kezelés, útkeresés, fájlrendszerek
- Szállítás, szállítmányozás
- Közlekedés irányítás
- Térképkészítés, tervezés
- Műhold, GPS

Források: Oktatási Hivatal: Matematikai, fizikai, kémiai összefüggések Négyjegyű függvénytáblázatok

ISBN 978-963-19-6982-5

https://en.wikipedia.org/wiki/Category:Unsolved_problems_in_graph_theory

Kiss Géza: Gráfelméleti problémák