Vektorok, vektor műveletek.
Vektorfelbontási tétel.
Vektorok koordinátái. Skaláris szorzat

FELKÉSZÍTŐ ANYAGOK EMELT SZINTŰ MATEMATIKA SZÓBELI ÉRETTSÉGIHEZ

KÉSZÍTETTE: JEGES BARBARA 11.E

VÁZLAT:

I. Vektor, vektor hossza, vektorok egyenlősége, párhuzamossága

II. Vektor műveletek, tulajdonságaik

III. Vektorok felbontása

IV. Vektorok koordinátái

V. Skaláris szorzat

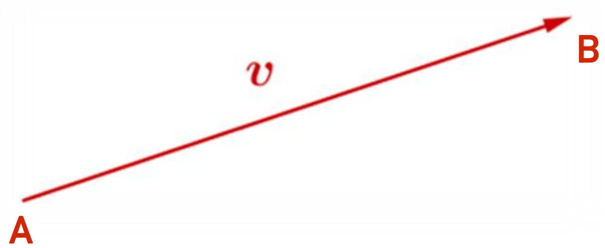
VI. Vektorok lineáris kombinációja

VII. Alkalmazások, matematikatörténeti vonatkozások

KIDOLGOZÁS:

I. VEKTOR

Az eltolás, mint egybevágósági transzformáció megadható az eltolás irányával és nagyságával, vagyis egy vektorral. Az irányított szakaszt vektornak nevezzük.
Jele: = $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$, A: kezdőpont, B: végpont
(ez szemléletes megoldás, a vektor alapfogalom, nem definiáljuk).



DEFINÍCIÓ: A vektor abszolút értéke a vektort meghatározó irányított szakasz hossza. Jele: $|\overrightarrow{AB}|$

DEFINÍCIÓ: Az a vektor, amelynek abszolút értéke nulla, a nullvektor. Jele: $\vec{0}$.
A nullvektor iránya tetszőleges, tehát minden vektorra merőleges, és minden vektorral párhuzamos.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egyirányú, ha a két vektor párhuzamos, és azonos irányba mutat.

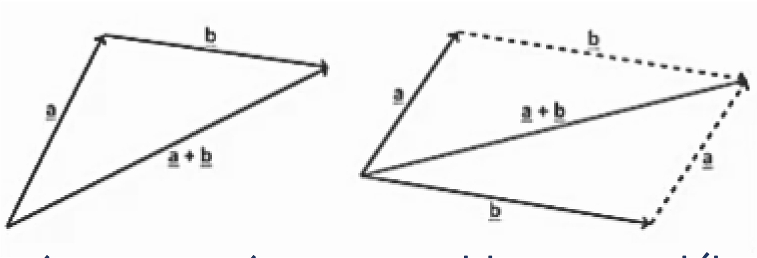
DEFINÍCIÓ: Két vektor ellentétes irányú, ha a két vektor párhuzamos, de ellentétes irányba mutat.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egyenlő, ha egyirányúak és abszolút értékük egyenlő.

DEFINÍCIÓ: Két vektor egymás ellentettje, ha ellentétes irányúak és abszolútértékük egyenlő.

II. VEKTOR MŰVELETEK

DEFINÍCIÓ: Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok összege annak az eltolásnak a vektora, amellyel helyettesíthető az $\vec{a}$ vektorral és a $\vec{b}$ vektorral történő eltolások egymásutánja. Jele: $\vec{a} + \vec{b}$.



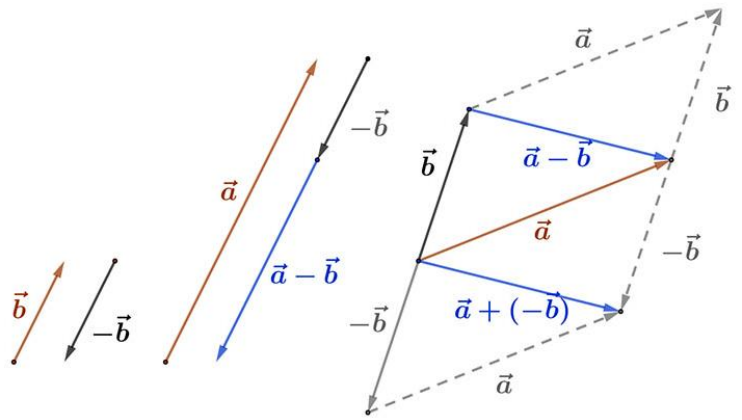
háromszög-szabály **paralelogramma-szabály**

Ellentett vektorok összege a nullvektor: $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

A VEKTORÖSSZEADÁS TULAJDONSÁGAI:

1. kommutatív: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (az összeg nem függ az összeadandók sorrendjétől).
2. asszociatív: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (az összeg független az összeadandók csoportosításától).

DEFINÍCIÓ: Az $\vec{a} - \vec{b}$ különbségvektor az a vektor, amelyhez a $\vec{b}$ vektort adva az $\vec{a}$ vektort kapjuk. Jele: $\vec{a} - \vec{b}$



Az $\vec{a} - \vec{b}$ és $\vec{b} - \vec{a}$ egymás ellentettjei.

DEFINÍCIÓ: Egy nullvektortól különböző $\vec{a}$ vektor tetszőleges λ valós számmal (skalárral) vett szorzata egy olyan vektor, amelynek abszolút értéke $|\lambda| \cdot |a|$ és $\lambda > 0$ esetén $\vec{a}$ -val egyirányú, $\lambda < 0$ esetén $\vec{a}$ -val ellentétes irányú. A nullvektort bármilyen valós számmal szorozva nullvektort kapunk.

A SKALÁRRAL VETT SZORZÁS TULAJDONSÁGAI:

1.disztributív:
$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\beta} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} = (\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) \cdot \vec{\boldsymbol{a}} \\ \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{\alpha} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\vec{\boldsymbol{a}} + \vec{\boldsymbol{b}}) \end{cases}$$

2.asszociatív: $\boldsymbol{\alpha} \cdot (\boldsymbol{\beta} + \vec{\boldsymbol{a}}) = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) \cdot \vec{\boldsymbol{a}}$

III. VEKTOROK FELBONTÁSA

DEFINÍCIÓ: Tetszőleges $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektorokkal és α, β valós számokkal képzett $\vec{v} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ vektort az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok lineáris kombinációjának nevezzük.

TÉTEL: Ha $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ nullvektortól különböző párhuzamos vektorok, akkor pontosan egy olyan a valós szám létezik, amelyre $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a}$.

TÉTEL: Ha $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ nullvektortól különböző, nem párhuzamos vektorok, akkor a velük egy síkban levő minden $\vec{c}$ vektor egyértelműen előáll $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ vektorok LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT,
azaz $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$ alakban, ahol α *és* β egyértelműen meghatározott valós számok.
Ez azt jelenti, hogy $\vec{c}$ egyértelműen felbontható $\vec{a}$ $- val$ *és* $\vec{b}$ $- vel$ párhuzamos összetevőkre.

DEFINÍCIÓ: A lineáris kombinációban szereplő $\vec{a}$ *és* $\vec{b}$ vektorokat BÁZISVEKTOROKNAK nevezzük.

$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$; $\vec{k}$ A koordináta-rendszerrel párhuzamos egységnyi hosszúságú vektor

$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = |\vec{k}| = 1$$

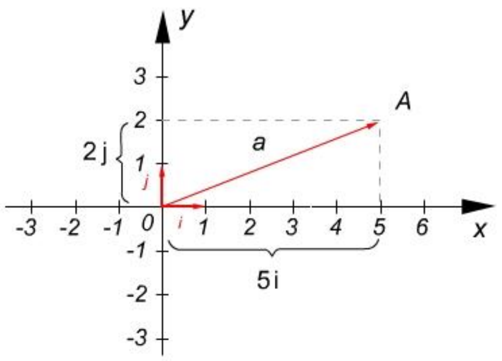
DEFINÍCIÓ: Egy rögzített pontból induló vektort HELYVEKTORNAK nevezünk. Minden helyvektor az origóból indul ki (O).

$$\overrightarrow{OC} = helyvektor$$

IV. VEKTOROK KOORDINÁTÁI

DEFINÍCIÓ: A síkbeli derékszögű (x; y) koordináta-rendszer bázisvektorai az origóból az (1; 0) pontba mutató $\vec{\imath}$ és a (0; 1) pontba mutató $\vec{\jmath}$ EGYSÉGVEKTOROK.

DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben az A (a_1, a_2) pont HELYVEKTORA az origóból az A pontba mutató vektor.



DEFINÍCIÓ: A derékszögű koordináta-rendszerben egy VEKTOR KOORDINÁTÁINAK nevezzük az origó kezdőpontú, vele egyenlő helyvektor végpontjának koordinátáit. Jele: $\vec{a}(a_1, a_2)$

TÉTEL: (Az előbbiek alapján) a koordinátasík összes $\vec{v}$ vektora egyértelműen előáll $\vec{\imath}$ *és* $\vec{\jmath}$ vektorok LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJAKÉNT $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{\imath} + v_2 \cdot \vec{\jmath}$ alakban. Az így meghatározott (v_1, v_2) rendezett számpárt a $\vec{v}$ vektor koordinátáinak nevezzük. Jele: $\vec{v}(v_1, v_2)$.

TÉTEL: Vektor koordinátáinak kiszámítása kezdő- és végpontjának segítségével:

$$A(a_1, a_2), B(b_1, b_2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

TÉTEL: Ha a $\vec{v}$ vektor koordinátái $\vec{v}(v_1, v_2)$, akkor a vektor hossza $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

VEKTOR MŰVELETEK KOORDINÁTÁKKAL:

Legyenek: $\vec{a}(a_1, a_2)$ *és* $\vec{b}(b_1, b_2)$ *adott vektorok.*

TÉTEL: **Két vektor összegének a koordinátái** az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak összegével egyenlők: $\vec{a} + \vec{b}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

TÉTEL: **Két vektor különbségének koordinátái** az egyes vektorok megfelelő koordinátáinak különbségével egyenlő: $\vec{a} - \vec{b}(a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

TÉTEL: **Vektor számszorosának koordinátái**: $\lambda\vec{a}(\lambda a_1, \lambda a_2)$.

TÉTEL: **Vektor ellentettjének koordinátái**: $-\vec{a}(-a_1, -a_2)$.

TÉTEL: Ha egy vektort **90°-kal elforgatunk**, koordinátái felcserélődnek és az egyik előjelet vált:

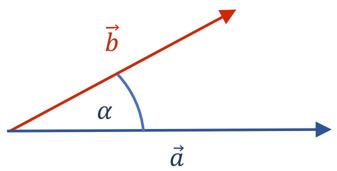
Az $\vec{a}(a_1, a_2)$ vektor +90°-os elforgatottjának koordinátái $\overrightarrow{a'}(-a_2, a_1)$.

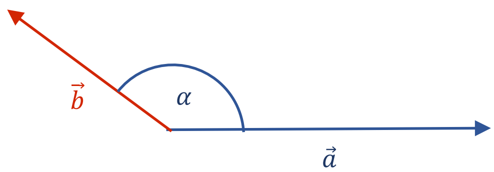
-90°-os elforgatottjának koordinátái: $\overrightarrow{a''}(a_2, -a_1)$.

V. SKALÁRIS SZORZAT

DEFINÍCIÓ: **Két vektor szöge:**

- Egyállású vektorok szöge **0°**, ha egyirányúak; vagy **180°**, ha ellentétes irányúak.
- Nem egyállású vektorok esetén a vektorok hajlásszögén a közös pontból kiinduló vektorok félegyenesei által bezárt konvex szöget értjük.

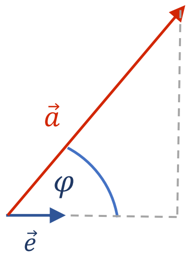




DEFINÍCIÓ: Tetszőleges két vektor skaláris szorzata a két vektor abszolútértékének és hajlásszögük koszinuszának szorzata: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\alpha$ ahol $0° \leq \alpha \leq 180°$.

SKALÁRIS SZORZAT TULAJDONSÁGAI:

- kommutatív $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$
- számmal való szorzása $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=(\lambda\vec{a})\vec{b}=(\lambda\vec{b})\vec{a}$ $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}$
  ha $\boldsymbol{\lambda>0}$
  $(\lambda\vec{a})\vec{b}=|\lambda\vec{a}|\cdot\vec{b}\cdot cos\varphi=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})<\mathbf{0}$ **az eredeti vektor ellentett vektora**
  $(-\vec{\boldsymbol{a}})\boldsymbol{b}=|\vec{\boldsymbol{a}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot\boldsymbol{cos}(\mathbf{180°}-\boldsymbol{\varphi})=-|\vec{\boldsymbol{a}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot\boldsymbol{cos\varphi}=-|\vec{\boldsymbol{a}}|\cdot|\vec{\boldsymbol{b}}|\cdot\boldsymbol{cos\varphi}=-\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}$
- skalárvetület
  Egy vektornak és egy egységvektornak a skaláris szorzata a vektornak az egységvektor egyenesén lévő előjeles vetületét adja. Ezt **skalárvetületnek** nevezzük.
  $\vec{a}\cdot\vec{e}=|\vec{a}|\cdot|\vec{e}|\cdot cos\varphi=\vec{a}\cdot cos\varphi=\overrightarrow{a_e}$



- disztributív $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$
  - $\vec{c}=0$ triviális
  - $\vec{c}\neq 0$ $\vec{c}=\lambda\vec{e}$
    $(\vec{a}+\vec{b})\vec{e}=\vec{a}\cdot\vec{e}+\vec{b}\cdot\vec{e}$
- nem asszociatív $(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\neq\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})$
  $\lambda\vec{c}\neq\eta\vec{a}$

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata akkor és csak akkor 0, ha a két vektor merőleges egymásra:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$$

BIZONYÍTÁS: /DIREKT/

A. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos90°=0$

B. $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\ \Rightarrow\ \vec{a}\perp\vec{b}$
  - $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\varphi=0$
    $\vec{a};\vec{b};\ \vec{a}\wedge\vec{b}=0$
  - $|\vec{a}|\neq|\vec{b}|$ $cos\varphi=0$
    $\varphi=\frac{\pi}{2}$
    $\varphi=90°$

TÉTEL: Két vektor skaláris szorzata koordinátákkal: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$, azaz a megfelelő koordináták szorzatának összege.

BIZONYÍTÁS:

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{a}(a_1, a_2) \Rightarrow \vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}\\
&\vec{b}(b_1, b_2) \Rightarrow \vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}\\
&\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j}) = a_1b_1\vec{i^2} + a_1b_2\vec{i} + a_2b_1\vec{i}\cdot\vec{j} + a_2b_2\vec{j^2}\\
&\vec{i^2} = 1\cdot 1\cdot cos0° = 1\\
&\vec{j^2} = 1\cdot 1\cdot cos0° = 1\\
&\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{i} = 1\cdot 1\cdot cos90° = 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

VI. VEKTOROK LINEÁRIS KOMBINÁCIÓJA

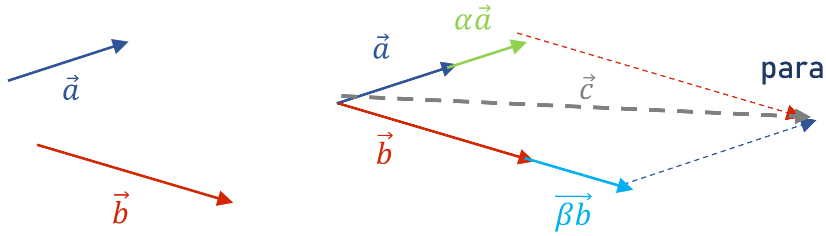
Ha egy síkban adott 2 nem párhuzamos $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektor (egyik sem nullvektor), akkor a sík bármely $\vec{c}$ vektora egyértelműen előállítható az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ lineáris kombinációjaként, azaz

$$\vec{a} \wedge \vec{b}(\neq 0) \Rightarrow \vec{c}, ahol\ \alpha, \beta \epsilon \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}$$

BIZONYÍTÁS:

a. előállítható



paralelogramma-szabály

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

b. /indirekt/ „egyértelmű”

$$\exists\alpha_1, \beta_1 \epsilon \mathbb{R}\ ahol\ \alpha_1 \neq \alpha;\ \beta_1 \neq \beta$$

$$\left.\begin{aligned}
&\vec{c} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}\\
&\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{c}
\end{aligned}\right\}$$

$$\alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

$$\alpha_1\vec{a} - \alpha\vec{a} = \beta\vec{b} - \beta_1\vec{b}$$

$$\vec{a}(\alpha_1 - \alpha) = \vec{b}(\beta - \beta_1)$$

$$\vec{a} \neq \vec{b}$$

VII. ALKALMAZÁSOK, MATEMATIKATÖRTÉNETI VONATKOZÁSOK

ALKALMAZÁSOK

- Vektorok bizonyításban: háromszög súlypontja harmadolja a súlyvonalakat;
  Euler-egyenes: a háromszög köré írható kör középpontja, súlypontja, magasságpontja egy egyenesen van és $\frac{KS}{SM} = \frac{1}{2}$
- Szögfüggvények tetszőleges forgásszögre történő definiálása egységvektorok segítségével történik.
- Fizikában vektormennyiségek (erő, elmozdulás) összeadásában, felbontásában, a munka egyenlő az erő és az elmozdulás skaláris szorzatával.
- Skaláris szorzat: koszinusztétel bizonyítása
- Koordináta-geometriában az egyenes normálvektora, illetve irányvektora segítségével az egyenes egyenletének felírása
- Trigonometria alkalmazásainál

MATEMATIKATÖRTÉNETI VONATKOZÁSOK:

A **vektor fogalma** absztrakció útján alakult ki, használata a matematikában és a fizikában végig kíséri tanulmányainkat.

A vektor elnevezés a csillagászatból került át a matematikába. Ott az ellipszis fókuszában álló Napból a bolygókhoz húzott irányított szakasz elnevezésére szolgált.

Először az eltolás, mint geometriai transzformáció kapcsán tanulmányozzuk, ezalatt tapasztaljuk, hogy a vektormodellben való gondolkodás segít a problémamegoldásban, fizikában a jelenségek értelmezésében,
pl. elmozdulás, erő, sebesség leírásában, a vektorok skalárszorzata a munka jellemzésében.

Descartes francia matematikus az 1600-as években alkotta meg a derékszögű koordinátarendszert, geometriai problémák megoldásakor sokszor alkalmazott algebrai módszereket. Írt egy Geometria című könyvet, amelyben egy pont helyzetét két koordinátájával adjuk meg.

Hamilton ír matematikus és csillagász használta először a vektor elnevezést az 1800-as években.

Források:

https://www.mozaik.info.hu/Homepage/pdf/emelt_matek_erettsegi_temakorok_2022.pdf

https://www.matekmindenkinek.hu/matematikai-kepletek/vektorok-osszeadasa