

# Testek osztályozása

A minket körülvevő tárgyak tulajdonságai alapján alakultak ki a térgeometriai fogalmak.

A matematikában a test a térnek felületekkel körülhatárolt része.

Mértani testeket többféleképpen csoportosíthatjuk.

1., Poliéderek és nem poliéderek

2., Hengerszerű testek; kúpszerű testek és a gömb

Vannak olyan testek is, amelyeket síkidomok és görbült felületek határolnak.

és olyanok is, amelyeket csak görbült felületek határolnak.

Azok között a testek között, amelyek nem poliéderek, találunk olyanokat, amelyeknek a felülete síkba kiteríthető, és olyanokat is, amelyeknek a felülete nem teríthető ki síkba. A kiteríthetőség a felszín kiszámítása miatt fontos.

**Poliéder** véges sok sokszögtartomány által határolt térrész, ami teljes egyenest nem tartalmaz.

A poliéder jellemzői: csúcs, él, lap, lapátló, testátló.

A határoló sokszögtartományok a poliéderek lapjai.

A poliéderekre vonatkozó szabályossági feltételek a következők:

\*Lapok:\* A poliéder lapjai sík felületek, és mindegyikükből szabályos sokszög.

\*Élek:\* Az élek egyenes szakaszok, és minden élt pontosan két lap köt össze.

\*Csúcsok:\* A csúcsok olyan pontok, ahol legalább három él találkozik.

\*Szimmetria:\* A poliéder szimmetriával rendelkezik, ami azt jelenti, hogy létezik olyan transzformáció (pl. forgatás vagy tükrözés), amely megőrzi az alakzatot.

Ezek a feltételek együttesen definiálják a szabályos poliédereket, mint például a kockát, hasábot vagy a tetraédert.

- \*Gúla:\* Adott az alapsíkon egy sokszög (alaplap) és egy pont az alapsíkon kívül (csúcspont). Ha a sokszög minden pontját egyenesekkel összekötjük az adott ponttal, gúlafelületet kapunk. A keletkező korlátos térrészt nevezzük gúlának. A gúla magassága az alaplap síkjának és a csúcspontnak a távolság

Szabályos gúlaról akkor beszélünk, ha az alaplapja szabályos sokszög és az oldalélei egyenlők.

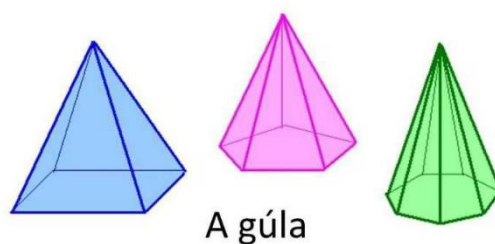
Csonkagúlát kapunk, ha a kúpszerű testet elmetsszük az alaplappal párhuzamos síkkal.

A gúlákat tovább az alapjuk által meghatározott sokszög szerint csoportosíthatjuk:

pl: 3 oldalú gúla = tetraéder, 4 oldalú a négyszög alapú gúla.

-Téglatest: téglalap alapú egyenes hasáb. Hat téglalap határolja. A téglatest egy derékszögű paralelepipedon, vagyis hat lap által határolt térbeli geometriai alakzat, amelynek minden oldallapja paralelogramma. A téglatest élszögei és lapszögei egyaránt derékszögek.

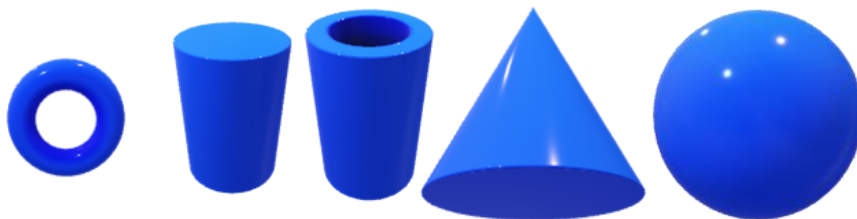
-Kocka: egy speciális téglatest, amelynek minden éle egyenlő.



**Euler tétele:** Ha egy egyszerű poliéder csúcsainak számát  $c$ , éleinek számát  $e$  és lapjainak számát  $l$  jelöli, akkor  $l+c=e+2$ .

A kimondott tétel minden konvex poliéderre igaz, hiszen minden konvex poliéder egyszerű.

### Nem poliéderek



Általában nem szabályosak, vagy nem szilárd testek. Például: gömb, henger, és kúp nem poliéderek, mivel lapjaik görbületekkel rendelkeznek. Ezek a formák végtelen sok pontból vagy síkból állnak, és nem teljesítik a poliéderekre vonatkozó szabályossági feltételeket.

pl.: Egy hengerszerű alapú poliéder olyan alakzat, aminek van egy olyan lapja, ami a hengerrel párhuzamos, és a többi lap szabályos sokszögekből áll.

-Ha az alaplap kör, a test neve henger.

-Ha egy síkidom kerületén úgy vezetünk végig egy egyenest, hogy az állandóan illeszkedjen egy, a síkidom síkján kívüli pontra, akkor kúpszerű testet kapunk. Kúpszerű test kúp, ha az alaplapja kör.

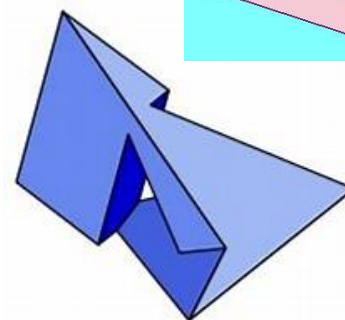
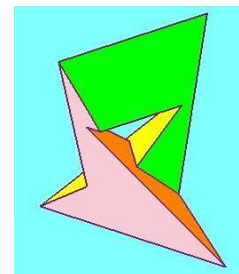
A kúp lehet egyenes vagy ferde, metszőkúp, forgási kúp és csonkakúp.

- Gömb: A gömb egy háromdimenziós alakzat, amely minden pontja azonos távolságra van a középpontjától. Nem rendelkezik lapokkal vagy éllel, csak egy folytonos görbült felülettel.

### Különleges testek

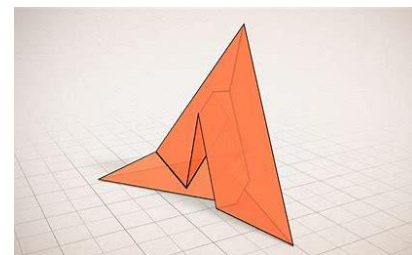
-Szilassi-poliéder:

Szilassi-poliéder egy konkáv poliéder hét hatszögletű lappal. A tetraéder mellett az egyetlen olyan poliéder, amire teljesül, hogy bármelyik két lapjának van közös éle. Nevét Szilassi Lajos magyar matematikusról kapta, aki az alakzatot 1977-ben fedezte fel. Az ilyen testek az egyszerű poliédereken túlmutatnak és speciális geometriai tulajdonságokkal rendelkeznek.



- Császárfél-poliéder: nemkonvex poliéder 14 háromszög határolja.

Átlói nincsenek, minden pár csúcspár egy élben érintkezik egymással. A nevét a felfedezőjéről, Császár Ákosról kapta. Egy speciális poliéder típus, amely két különböző szabályos sokszögből áll, a csúcspontok és az élek szabályosak, a lapok azonban nem. A császárféle poliéder egyfajta félig poliéder, amely érdekes geometriai tulajdonságokkal bír.



## - Gömböc:

egy konvex, homogén, háromdimenziós test, amelynek az a specialitása, hogy összesen két: egy stabil és egy instabil egyensúlyi helyzete van. A stabil helyzet az, amit a képek mutatnak. Ez azt jelenti, hogy ha a gömböc elindul bármilyen irányba, akkor végül egyetlen stabil ponthoz jut.

Az instabil ugyanez fejjel lefelé fordítva. Itt elvben meg tudna állni, de bármely kis mozgás kibillenti ebből a helyzetből. Ezt a különleges testet Várkonyi Péter és Dr. Domokos Gábor, a BME oktatói fedezték fel 2007-ben. Ezt az alakzatot stabilitás szempontjából vizsgálják.



## A test felszíne és térfogata

A test felszíne a testet határoló felület területe. Síklapokkal határolt testek esetén a határolólapok területének összege.

Térfogat axiómái:

Minden poliéderhez hozzárendelhetünk egy számot, amelyet térfogatnak nevezünk, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

- 1., Minden poliéder térfogata pozitív valós szám.
- 2., Egybevágó poliéderek térfogata egyenlő.
- 3., Ha egy poliédert két poliéderre bontunk, e kettő térfogatának összege az eredeti poliéder térfogatával egyenlő.
- 4., Az egységkocka térfogata 1.

Leggyakrabban használt testek térfogata, felszíne:

- A kocka térfogata:  $V = a^3$ , felszíne  $A = 6a^2$  ( $a$  = kocka éle).
- A téglatest térfogata  $V = abc$ , felszíne  $A = 2(ab + bc + ac)$  ( $a$ ,  $b$  és  $c$  a téglatest élei).
- A hasáb térfogata:  $V = \text{alapterület} \cdot \text{testmagasság}$ , felszíne:  $A = 2 \cdot \text{alapterület} + \text{palást területe}$ .
- A gúla, kúp térfogata  $V = (\text{alapterület} \times \text{testmagasság})/3$ , felszínét a határoló lapok területeinek összege adja.

- A csonkagúla térfogata:  $V = \frac{M}{3}(T + \sqrt{t \cdot T} + t)$  ahol  $M$  a testmagasság,  $t$  a fedőlap,  $T$  az alaplappal területe.

**Hasonló testek:** két test hasonló, ha van olyan hasonlósági transzformáció, amely egyiket a másikhoz rendeli. Hasonló testek esetén fennáll a síkidomokra is érvényes állítás: az egyik alakzat két tetszőleges pontjának egymástól való távolsága  $s$  a másik alakzat megfelelő pontjainak egymástól való távolsága között levő arány állandó.

Hasonló testek felszínének aránya a hasonlóság arányának négyzete. Hasonló testek térfogatának aránya a hasonlóság arányának köbe.

## Alkalmazások:

A térfogat és felszín számítása számos mindennapi helyzetben fontos lehet. Például egy csomag térfogatának és felszínének kiszámítása segíthet a csomagolási vagy tárolási igények pontos meghatározásában. Az építészetben és tervezésben a térfogat és felszín számítások alkalmazása segíthet az anyagmennyiség becslésében és a projekttervek kialakításában. Ezek az számítások hozzájárulhatnak a hatékonyabb erőforrásfelhasználáshoz és költségtervezéshez is.

## Matematikatörténeti vonatkozások:

- A legkorábbi írásos emlékek a hengerszerű testekről Kr. e. 2000 körül keletkeztek. Ezek szerint Egyiptomban henger alakú gabonartályok térfogatát meg tudták határozni.
- Kr. e. 325 körül **Eukleidész** megírta *Elemek* című művét, amiben a geometriát axiomatikusan építette fel, azaz a szemléletre hagyatkozva alapfogalmakat (axiómákat) határozott meg, és ezek segítségével bizonyított állításokat. A hasábok, gúla, gömb térfogatának vizsgálatára a kimerítés módszerét (beírt és körülírt hasábok térfogatával való közelítést) használta. Vizsgálta az öt szabályos testet, meghatározta térfogatukat, bebizonyította, hogy csak öt szabályos test létezik.
- **Arkhimédész** (Kr.e III.sz.) bebizonyította, hogy a gömb felszíne megegyezik a köré írt hengerpalást területével, és a térfogata a köré írt henger térfogatának  $\frac{2}{3}$  része. Egy másik nevezetes tétele szerint az egyenlő oldalú henger, a bele írható gömb és a hengerbe írható kúp térfogatainak aránya 3:2:1.
- **Heron** Kr. e. I. században élt görög matematikus síkidomok területének és testek térfogatának kiszámításával is foglalkozott.
- **Janus Pannonius** (1434–1472) magyar költő szépen körülírta a tételeket, amelyeket a matematikában nem definiálunk.  
Janus Pannonius: A geometriai idomokról  
„Pont az, melynek részét felfogni sem tudnád, megnyújtod, s karcsú egyenes fut bármely irányban. Sík felület születik, ha meg is duplázza futását: szélteben terjed, nem nyílik meg soha mélye. Két-két sík a szilárd testet jellemzi, kiadja hosszúságát és szélességét, meg a mélyét. Kockának, köbnek hívják s négyzetlapú testnek, bárhogy esik, midig jól látni a részeit ennek; hat síkot foglal magába, a szöglete épp nyolc” (Kurcz Ágnes fordítása)

## Források:

<https://zanza.tv/matematika/geometria/mertani-testek-csoportositasa>

[http://users.atw.hu/polyeder5/43\\_szablyos\\_testek\\_jellemz\\_adatai.html](http://users.atw.hu/polyeder5/43_szablyos_testek_jellemz_adatai.html)

<https://tudasbazis.sulinet.hu/hu/matematika/matematika/matematika...>

[Gömböc - Egy matematikai őstest \(gomboc.eu\)](http://gomboc.eu)

Hajós György: Bevezetés a geometriába

emelt\_matek\_eretts\_temakorok\_2019.pdf