



KOMBINATORIKA ÉS VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS

KÉSZÍTETTE: MÉSZÁROS LUJZA 12.E

MATEMATIKATÖRTÉNET

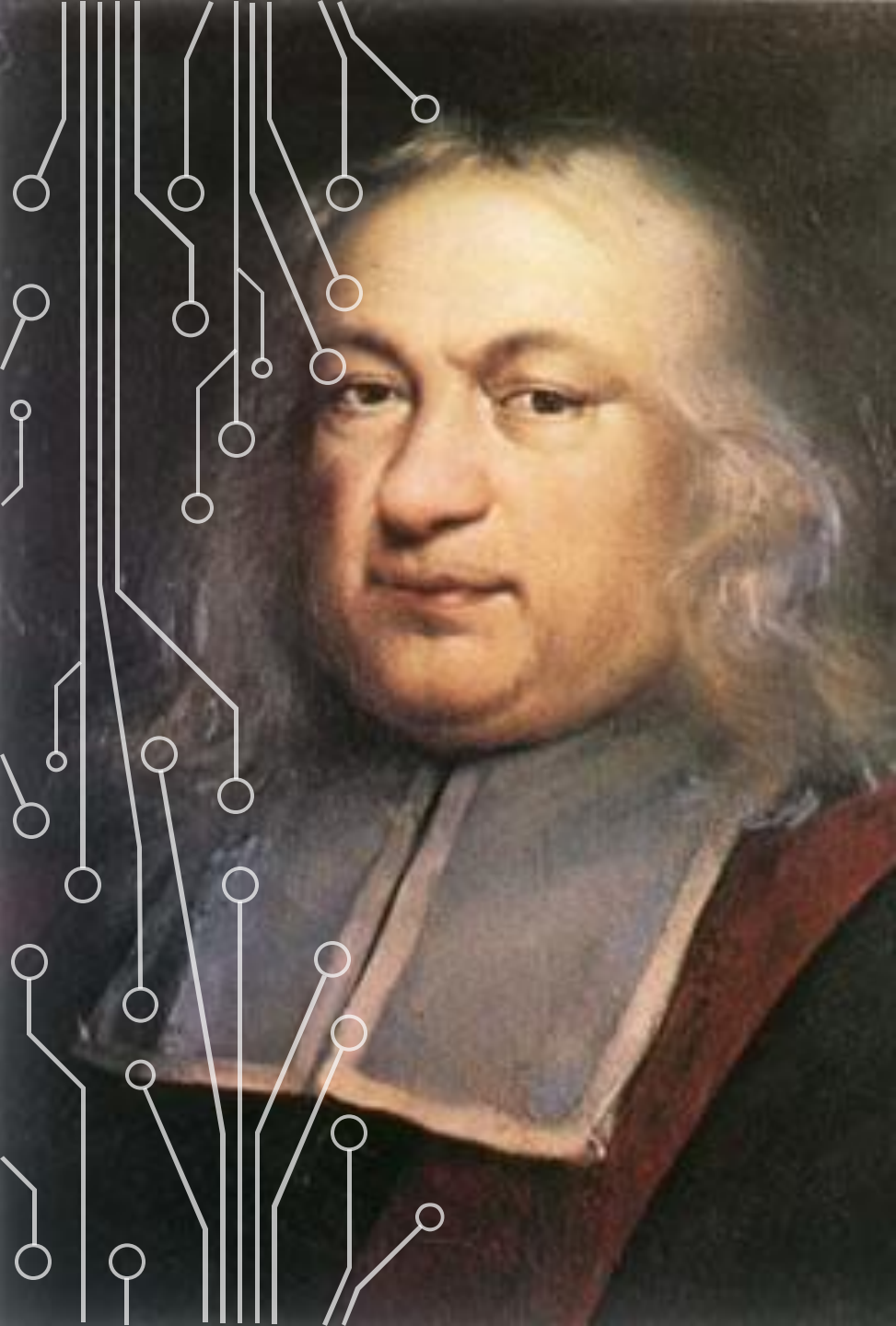


- **Pascal** (1623–1662)
- francia matematikus, fizikus, vallásfilozófus, teológus, moralista és vitatkozó
- 12 éves korában fordította a fejét a tudományok felé
- Számos területen maradandót alkotott (*Fizikában a légnyomás kísérleti bizonyítása, első számológép megalkotása édesapja segítségével, irodalomban*)
- Érdeklődött a kombinatorika és a valószínűségszámítás után
- Első felvetődött kérdése: *“Ha egy kockával dobunk, akkor előnyös arra fogadni, hogy az első négyben lesz hatos, előnytelen viszont arra, hogy két kockával dobva az első 24 között legalább egyszer 2 hatos lesz.”*
- Binomiális együtthatókra létrehozta a Pascal háromszöget, melyet indukciós módon bizonyított (Erre is ő adta a pontos definíciót)

- **Csu Si-csie** (XII. század)
- Kínában már hasonló háromszöget alkotott, csak a Pascale jobban szemlélteti az együtthatók rendszerét
- **Indiai, Perzsai és Itáliai matematikusok**
- Hasonló háromszögeket alkottak meg, de Pascal mutatott először hozzá számolási formát



- **Leibniz** (1646–1716)
- német matematikus, filozófus, biológus, geológus, nyelvész, teológus és jogász(polihisztor)
- Mechanikus számológép továbbfejlesztője
- A matematikai logikát szerette volna megteremteni
- Newton-Leibniz tétel megalkotása, amely a differenciászámítás és az integrálás közötti kapcsolatot ismerteti
- A kombinatorika első módszeres felépítését ő adta meg
- Bekapcsolódott Pascal és Fermat munkásságába
- Sok matematikai jelölés és elnevezés tőle származik
- Kutatta a tizedes törtek tulajdonságait



- **Pierre Fermat** (1601-1665)
- Francia matematikus, fizikus és ügyvéd
- Sokszor közölte a matematikai felfedezéseit levelezésben, de bizonyítást nem írt le
- Barátságos számpárok felfedezése
- Egy szám összes osztóinak meghatározása
- minden egész szám vagy teljes négyzet, vagy felbontható két vagy három vagy esetleg négy négyzetszám összegére
- Fermat sejtés
- Valószínűségszámítás atyjának tekinthető
- Pascallal a szerencsejátékról szóló vitáiban lefektették a valószínűségszámítása alapjait és a kombinatorika szabályait



- **Bernoulli** (1654–1705)
- (a családjában sok híres matematikus és fizikus volt)
- svájci matematikus
- Logaritmikus spirál kutatása
- Bernoulli-egyenlőtlenség
megalkotása: $(1+a)^n \geq 1+n \cdot a$; $a \in \mathbb{R}$; $a > -1$; $n \in \mathbb{N}$
- Sorozat határértékének vizsgálata
- Binomiális (Bernoulli) eloszlás
- valószínűségszámítás kombinatorikus módszerének a kidolgozása
- Hozzájárult a valószínűségelmélet kifejlesztéséhez

- **Buffon** (1707–1788)
- francia természettudós
- tűproblémájával bevezette a geometriai valószínűség fogalmát
- **Csebisev** (1821–1894), **Markov** (1856–1922)
- Orosz matematikusok
- **Kolmogorov** (1903–1987)
- valószínűségszámítás axiómarendszere

DEFINÍCIÓK, TÉTELEK

PERMUTÁCIÓ

- Egy adott n elemű halmaz elemeinek egy ismétlés nélküli permutációján az n különböző elem egy sorba rendezését (sorrendjét) értjük.
- TÉTEL: Egy n elemű halmaz ismétlés nélküli összes permutációinak száma:
 - $n(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1 = n!$
- Ha az n elem között van $k_1, k_2, \dots, k_m$ egymással megegyező, akkor az elemek egy sorba rendezését ismétléses permutációnak nevezzük.
- TÉTEL: Ha n elem között $k_1, k_2, \dots, k_m$ db megegyező van, és $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, akkor ezeket az elemeket $\frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$ különböző módon lehet sorba rendezni, ez az ismétléses permutációk száma.

VARIÁCIÓK

- Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \leq n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít, akkor az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációját kapjuk.
- TÉTEL: Az n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli variációk száma: $\frac{n!}{(n-k)!}$
- Legyen n db egymástól különböző elemünk. Ha ezekből kiválasztunk k db-ot minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendje is számít és ugyanazt az elemet többször is választhatjuk, akkor az n elem k -ad osztályú ismétléses variációját kapjuk.
- TÉTEL: Az n elem k -ad osztályú ismétléses variációk száma: n^k

KOMBINÁCIÓK (ISMÉTLÉSES, ISMÉTLÉS NÉLKÜLI)

- Legyen n egymástól különböző elemünk. Ha ezekből k ($k \leq n$) db-ot kiválasztunk minden lehetséges módon úgy, hogy a kiválasztott elemek sorrendjére nem vagyunk tekintettel, azaz n elem k -ad osztályú ismétlés nélküli kombinációját kapjuk.

$$\text{TÉTEL: } \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k(k-1)\dots 2 \ 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

- Definíció: Ha n különböző elemből kell k elemet kiválasztani úgy, hogy a kiválasztás sorrendje nem számít és a már kiválasztott elemeket újra kiválaszthatjuk, akkor az n elem k -ad osztályú **ismétléses kombinációját** kapjuk.
- Tétel: Az n elem k -ad osztályú ismétléses kombinációjának száma
 - $\binom{n + k - 1}{k}$

ESEMÉNYEK

- Véletlen jelenségnek nevezzük azokat a jelenségeket, amelyeket a leírható körülmények nem határozzák meg egyértelműen.
 - Pl. egy dobókocka feldobása.
- Elemi eseménynek nevezzük a kísérlet során bekövetkező lehetséges kimeneteket.
 - Pl. a kocka dobásánál azt, hogy hányas számot dobunk.
- Az eseménytér az elemi események halmaza.
 - Pl. a kocka dobásánál $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
- Az elemi események egy halmazát, azaz az eseménytér egy részhalmazát eseménynek nevezzük.
 - Pl. esemény a kockadobásnál páros szám dobása.
 - Az eseményeket nagybetűvel jelöljük. Pl. $A = \{2; 4; 6\}$
- Az eseménytérhez tartozó azon esemény, amely biztosan bekövetkezik, a biztos esemény, amely semmiképpen sem következhet be, a lehetetlen esemény.
 - A biztos esemény jele: H , a lehetetlen esemény jele: Δ .
 - Pl. a kockadobásnál biztos esemény: 7-nél kisebb számot dobunk, lehetetlen esemény: 8-nálnagyobbat dobunk.

MŰVELETEK ESEMÉNYEKKEL

- Komplementer: $\bar{A}$
- Összeg: $A+B$
- Szorzat: AB
- Kizárás: Egyszerre nem következhetnek be

VALÓSZÍNŰSÉGSZÁMÍTÁS ALAPJAI

- Ha elvégzünk n -szer egy kísérletet, és ebből az A esemény k -szor következik be, akkor az A esemény relatív gyakorisága a $\frac{k}{n}$ hányados.
- Ha sokszor elvégzünk egy kísérletet, akkor megfigyelhetjük, hogy egy A esemény relatív gyakorisága egy szám körül ingadozik. Ezt a számot nevezzük az A esemény valószínűségének.
 - Jele: $P(A)$
- A valószínűség kiszámításának klasszikus modelljét akkor alkalmazhatjuk, ha egy kísérletnek véges sok kimenetele van és ezek valószínűsége egyenlő. Ekkor az A esemény valószínűsége:
 - $P(A) = \frac{\text{kedvező elemi események száma}}{\text{összes elemi esemény száma}}$

VALÓSZÍNŰSÉG SZÁMÍTÁS AXIÓMÁI

A valószínűségszámítás axiómái

Az Ω eseménytér minden eseményéhez egy valós számot rendelünk, azaz Ω -án értelmezünk egy P függvényt. A P -t **valószínűségi függvénynek**, $P(A)$ -t pedig az $A \subseteq \Omega$ **esemény valószínűségének** nevezzük, ha teljesülnek az alábbi axiómák:

I. Minden $A \subseteq \Omega$ eseményre

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

II. $P(I) = 1$
azaz a biztos esemény valószínűsége 1

III. Ha A és B egymást kizáró események, akkor

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

IV. Ha az $A_1; A_2; \dots A_n; \dots$ egymást páronként kizáró események sorozata, akkor

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots P(A_n) + \dots$$

Ha Ω véges, akkor IV. felesleges.

ALKALMAZÁS

- **Sorbarendezési problémák:**

- Hányféleképpen lehet kitölteni egy totószelvényt?
- Sorsolások, versenyek eredményeinek sorrendjeinek lehetőségei

- **Kiválasztási problémák:**

- Hányféleképpen lehet kitölteni egy lottószelvényt?
- Egy n elemű halmaznak hány darab k elemű részhalmaza van?

- **Geometriai eloszlás:**

- Kvantumfizikában a részecske helyének meghatározása: azt lehet megmondani a részecske sebességétől függően, hogy hol tartózkodik legnagyobb valószínűséggel a részecske.

- **Klasszikus valószínűségi modell:**

- Szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása
- Mekkora a valószínűsége annak, hogy az ötös lottón, a hatos lottón telitalálatos szelvényünk lesz?

- **Binomiális eloszlás:**

- Meteorológiai előrejelzés
- Szerencsejátékoknál nyerési esély megállapítása: mekkora a valószínűsége annak, hogy a totón telitalálatos szelvényünk lesz?
- Mintavételek a minőség-ellenőrzés során: a gyártósorokon elkészült termékek közül a selejtek számának közelítő meghatározása várható érték segítségével

- **Binomiális együtthatók, Pascal-háromszög:**

- A Galton-deszka egy olyan egyenlő szárú háromszög alakú szerkezet, amelyben úgy vannak elhelyezve akadályok és útvonalak, hogy minden akadálynál egyenlő eséllyel (0,5) térhet eljobbra, illetve balra a lefele guruló golyó. A golyó a Galton-deszka egyes rekeszeibe a Pascal-háromszögben szereplő binomiális együtthatók alapján érkezik.

BINOMIÁLIS TÉTEL

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 = \binom{0}{0} \\(a+b)^1 &= a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b \\(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2 \\(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3\end{aligned}$$

- Általánosan: $(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}$
- Következménye: $2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n}$

The diagram illustrates the construction of Pascal's triangle using binomial coefficients. On the left, the coefficients for each row n are listed as $\binom{n}{k}$ for $k=0$ to $k=n$. On the right, the resulting Pascal's triangle is shown with the same values.

n	$\binom{n}{0}$	$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	3	1		
$n=4$	1	4	6	4	1	
$n=5$	1	5	10	10	5	1