Sorozatok, sorok

MATEMATIKATÖRTÉNETI VONATKOZÁSOK:

- Már az ókori egyiptomiak is ismerték a számtani és a mértani sorozatokat. Erről tanúskodik az ún. Rhind-papirusz, amely körülbelül Kr. e. 1750-ből való.
  A Rhind-papiruszon található egy mértani sorozatos feladat. Valószínűleg az egyiptomiak ismerték a mértani sorozat összegképletének kiszámítási módját (nem magát a képletet, hanem a módszert).

Rhind-papirusz

- A pitagoreusok (Pitagorasz tanítványai) Kr. e. 5–600 körül tudták a számtani sorozat tagjait összegezni, ismerték az első n páratlan szám összegét.

- Babilóniában a Kr. e. VI–III. század között már ismerték a számtani haladvány összegképletének megfelelő eljárást. Utasítást adtak az első n négyzetszám összegének a kiszámítására.

- A számtani sorozat összegképletére a hinduk az V–XII., a kínaiak pedig a VI–IX. század között jöttek rá.
- A mértani sorozat összegképletét az 1300-as években Beldomandi olasz matematikus találta ki.

Pitagorasz

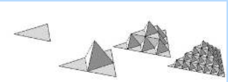
- Euler (1717–1783) német matematikus vezette be a róla elnevezett sorozat határértékét e-nek.
- Cauchy (1789–1837) francia matematikus fektette szilárd alapokra a matematika alapvető fogalmait (mint például konvergencia, sorozat, határérték), ő definiálta ezeket a matematikában megkövetelt szabatossággal.

Leonhard Euler

- Az indiai matematikusok már a XV. században dolgoztak végtelen sorokkal, míg az európai matematika csak a XVII. században jutott el idáig. Ekkor azonban a végtelen sorok tanulmányozása gyors fejlődésnek indult, mert a matematikusok felismerték, hogy bizonyos mennyiségek és függvények kiszámítása és vizsgálata egyszerűbbé válik, ha végtelen soralakban írjuk fel őket.

Augustin Cauchy

- Koch (1870–1924) svéd matematikus megalkotta a Koch-görbét: egy szabályos háromszög oldalait harmadoljuk, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezen a háromszögön hajtsuk végre az oldal harmadolását, a középső harmad fölé írjunk kifele egy újabb szabályos háromszöget, majd ezt az eljárást folytassuk a végtelenségig. A kialakult alakzat kerületét, területét végtelen mértani sorral számolhatjuk ki.



Koch-görbe

ALAPFOGALMAK:

I. SOROZATOK:

DEFINÍCIÓ: A számsorozat olyan függvény, amelynek értelmezési tartománya a pozitív egész számok halmaza, értékkészlete pedig a racionális számok halmaza.
f: $\mathrm{IN}^+ \rightarrow \mathrm{R}$

a) Számtani:

DEFINÍCIÓ: Számtani sorozat: Azt a sorozatot nevezzük számtani sorozatnak, amelyre teljesül, hogy $a_1 = a$ és $a_n + 1 = a_n + d$, ha $n \geq 1$, és létezik a, d.

TÉTEL: $a_n = a_1 + (n - 1) * d$, $n \in \mathrm{IN}^+$

TÉTEL: Az első n tag összege: $s_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$, $n \in \mathrm{IN}^+$

b) Mértani:

DEFINÍCIÓ: Mértani sorozatnak nevezzük azt a sorozatot, ahol létezik a_1, q és $a_{n+1} = a_{n*}q$.

TÉTEL: $a_n = a_1 * q^{n-1}$, $n \in \mathrm{IN}^+ \backslash \{1\}$

TÉTEL: Első n tag összege: $S_n = a_1 * \frac{q^n - 1}{q - 1}$, $n \in \mathrm{IN}^+ \backslash \{1\}$

II. VÉGTELEN SOROK:

DEFINÍCIÓ: Az $\{a_n\}$ számsorozat tagjaiból képzett $a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_n+\ldots$ végtelen sok tagot tartalmazó összeget végtelen számsornak (vagy csak sornak) nevezzük.

DEFINÍCIÓ: Egy valós $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergens, ha a részlet összegéből képzett S_n konvergens.

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \to \infty} S_n = S$$

TÉTEL: $\sum_{i=1}^{\infty} a_{i*} q^i$ sor $\Leftrightarrow$ konvergens, ha $0 < |q| < 1$.

ALKALMAZÁSOK:

- A Fibonacci-sorozat elemeivel sok helyen találkozhatunk a természetben. Például a virágok szirmai, fenyőtoboz, az ananász pikkelyei, a napraforgó magjai Fibonacci-spirálban helyezkednek el.
- Speciális sorozatok határértéke:
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ = e, ami a természetes alapú logaritmus alapszáma (Euler típusú sorozat).
  - Következmény: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$
  - $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, ha $|q| < 1$

    ∞, ha $q > 1$

    nem létezik, ha $q \leq -1$

    1, ha $q = 1$

    Ez a mértani sorozat.
- Analízis: függvény határértékénél, folytonosságánál
- Irracionális kitevőjű hatvány fogalma sorozat határértékével

- Kamatoskamat-számítás: ha egy a összeg $p\%$-kal kamatozik évente, akkor az n-edik év végére az összeg $a_n = a\left(\frac{1+p}{100}\right)^n$.

  Ha $q = \frac{1+p}{100}$ + kamattényezõ, akkor $a_n = a*q_n$. Ez olyan mértani sorozat n-edik eleme, amelynek első eleme aq, hányadosa q.
- Gyűjtőjáradék: minden év elején egy a összeget teszünk a bankba, és ez $p\%$-kal kamatozik évente úgy, hogy a következő év elején a megnövekedett összeghez tesszük hozzá az újabbat. Ekkor az n-edik év végén a rendelkezésre álló összeg egy olyan mértani sorozat első n elemének összege, ahol $a_1 = aq$.

  Ha $q = \frac{1+p}{100}$ kamattényező, akkor $S_n = aq * \frac{q^n-1}{q-1}$ összeget gyűjtünk.
- Törlesztőjáradék: felveszünk n évre S_n nagyságú hitelt évi p%-os kamatra, és minden évben a összeget törlesztünk. Ekkor $S_n * q^n = a * \frac{q^n-1}{q-1}$
- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ határértéke e, ami a természetes alapú logaritmus alapszáma (Euler-típusú sorozat).
- Végtelen szakaszos tizedes törtek közönséges tört alakra hozásakor a konvergens mértani sor tulajdonságait használjuk.
- Végtelen mértani sor összege.
- Az $N = N_0 * e^{-\lambda(t-t_0)}$ Bomlási törvényben, ahol N a még el nem bontott részecskék száma, N_0 a kezdeti részecskeszám, λ az anyagra jellemzõ bomlási állandó. A felezési idő alatt a radioaktív atomok száma a kezdeti érték felére csökken, akármelyik pillanat az idő mérésének kezdete.
- Exponenciális függvénnyel írható le, azaz mértani sorozat szerint változó folyamatok pl a radioaktív izotópok bomlási egyenletei, vagy az oldódás folyamata, a kondenzátor feltöltődésének és kisülésének folyamata, baktériumok számának változása.

Forrás:

- https://m.mozaik.info.hu/Homepage/pdf/emelt_matek_eretts_temakorok_2019.pdf
- https://regi.tankonyvtar.hu/
- https://hu.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9rtani_sorozat

Készítette: Gál Hedvig 12.e