INTEGRÁLSZÁMÍTÁS

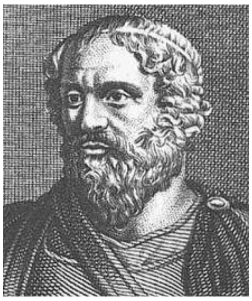
A matematikai **analízist**, a differenciál- és integrálszámítást, különösen kezdetben, a végtelen kicsiny mennyiségekkel, az **infinitezimálisokkal** való számolás jellemezte. Ezért szokás infinitezimálisszámításnak is nevezni. Azok a feladatok, amelyeknél felmerült az infinitezimálisokkal való számolás szüksége, nagyjából 2 csoportba oszthatók. Az egyikbe tartoznak az érintőkkel kapcsolatos számítások és a változások sebességének a meghatározása. Ezekkel foglalkozik a *differenciálszámítás*. A másik csoportba sorolhatók a terület-, térfogat-, súlypont- és nyomatékszámítások, amelyek általánosságban az *integrálszámítással* oldhatók meg

Knidoszi Eudoxosz

Történeti vonatkozások

1. A görögök és a „kimerítés módszere”

A XVII. század matematikájában a legnagyobb eredmény a differenciál- és integrálszámítás felfedezése volt. Az infinitezimális mennyiségek analízisének létrejötte nem egy vagy néhány tudós műve, zseniális találmánya volt. Az infinitezimális számítással kapcsolatos feladatok már az ókorban felvetődtek. A köztudatban az él, hogy a határozott integrálszámítás ókori elődje a „kimerítés módszere”, ez Eudoxosz és Arkhimédész által oly tökélyre vitt módszer valójában viszont nem számítás, hanem bizonyítás. A módszer lényege az indirekt bizonyítás, annak is egy olyan fajtája, amellyel területet és térfogatot határozunk meg.



Arkhimédész

2. Arkhimédésztől a 17. századig

Simon Stevin

Az integrálszámítás ókori módszereivel Európát Arkhimédész fordításai ismertették meg. Újra és újra felülvizsgálták Arkhimédész ókori feladatait, tanulmányozták infinitezimális módszereit, tisztázták e módszerek matematikai lehetőségeit. Így született meg 1586-ban Stevin Statikája, a háromszög súlypontjának és a hidrosztatikai nyomóerő kiszámításának meghatározó műve. Ezt követte Valerionak (1604) könyve a súlypontról és a parabolaszelet területéről, majd Guldinnek a

Paul Guldin

forgástestek felszínére és térfogatára vonatkozó eljárása 1614-ben. Kepler neve azért került be az analízis történetébe, mert szerette volna általánosítani Arkhimédész eredményt megjósoló módszereit. Kutatta, hogyan lehetne elfogadható számítással eljutni a megoldáshoz, feleslegessé téve a nehézkes kimerítési eljárást. Csillagászként érdekelte például a területszámítás problémája. Ezt tükrözi a bolygómozgás általa megfogalmazott 2. törvénye, amelyben az ellipszisszeletek területének kiszámításához az akkori módszerek nem voltak elegendők. Kepler eljutott odáig, hogy egységes eljárást talált a forgástestek térfogatának a kiszámítására. Bonaventura Cavalieri olasz matematikus és csillagász volt. Legnagyobb műve az *oszthatatlanok módszerének* kidolgozása volt, amit síkidomok területének és testek térfogatának meghatározására dolgozott ki. Az oszthatatlanok módszere lehetővé tette a korábban megoldhatatlan, nehéz feladatok megoldását.

Johannes Kepler

Bonaventura Cavalieri

3. Newton és Leibniz előtti integrálszámítás legfejlettebb formái

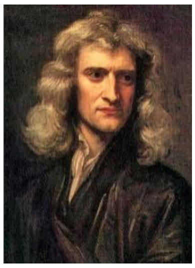
Blaise Pascal az oszthatatlanok elméletét felhasználva jutott el az $y = x^n$ parabola alatti terület kiszámításához. Pascal összefüggést talált a görbe érintője és a görbe alatti terület között. Ezért sokan úgy tartják, hogy kiengedte kezéből a differenciálhányados és az integrál fogalmának valamint az azok közti összefüggések felfedezését. Pierre de Fermat is jelentős haladást ért el az integrálszámítás megközelítésében. Viszont nem dolgozta ki integrálmódszerét általános számítási feladattá. Nem tette meg az utolsó lépést, amellyel megteremthette volna a geometriai feladatoktól független integrál fogalmát. Ugyanebben a cipőben járt John Wallis is.

Blaise Pascal

Pierre de Fermat

4. Az integrálszámítás megalapozása: Newton és Leibniz

A 17. század második felében a matematikának egy új területe kezdett kialakulni, a végtelen kicsiny mennyiségek analízise. Ez azért volt más, mivel elődeikhez képest nem egy konkrét síkidom vagy test területét vagy térfogatát próbálták meghatározni, hanem egy egységes eljárást találni, amellyel minden síkidom és test területe és térfogata



Sir Isaac Newton

Gottfried Wilhelm Leibniz

kiszámolható. A differenciál- és integrálszámítás 2 formában jelent meg: az egyik a *fluxióelmélet* alakjában, amit Newton és követői fejlesztettek ki Angliában, a másik forma *a Leibniz-féle differenciálokkal* való számolás, ami meghódította egész Európát. Sir Isaac Newton a mechanika matematikai leírására dolgozta ki módszerét, amely figyelembe vette a mozgást, és megragadta a sebesség és gyorsulás fogalmát. Ezt a módszert a *fluxiók* módszerének, illetve elméletének nevezte. Ezen elmélete, módszere az analízis legkorábbi formája volt, amely az *integrálszámítás inverz művelete*. Gottfried Wilhelm Leibniznél kezdetben az integrál határozott integrálként jelentkezett, mint végtelen sok, végtelen kicsiny differenciálok összege. Elődei munkáinak a tanulmányozásai során eljutott bizonyos sorok összegzéséhez, közben a Pascal-háromszögnek az alkalmazására tág teret talált. Leibniz nem tudva Newton munkájáról kifejezésre jutatta azt az elképzelését, miszerint a differenciálás eredményeit egyszerű megfordítás útján fel lehet használni a függvények integrálásánál. Newton is Leibniz is észrevette, hogy a differenciálszámítás és annak inverz művelete felhasználható a határozott integrál kiszámítására. Így nevezzük a kapcsolatot *Newton –Leibniz tételnek*.

5. Az integrál fogalmának fejlődése Newton és Leibniz után

Georg Friedrich Bernhard Riemann vezette be a függvénygörbe alatti terület első precíz definícióját. Őróla nevezzük ezt Riemann-integrálnak. Cauchy belátta, hogy minden [a,b] intervallumon folytonos függvénynél az így definiált határozott integrál létezik. A 19-20. században Thomas Jan Stieltjes és Henri Louis Lebesgue a Riemann – integrál általánosításában

George Friedrich Riemann

játszottak nagy szerepet.

Az integrálszámítás alapfogalmai

1. A határozatlan integrál, mint a deriválás inverz művelete

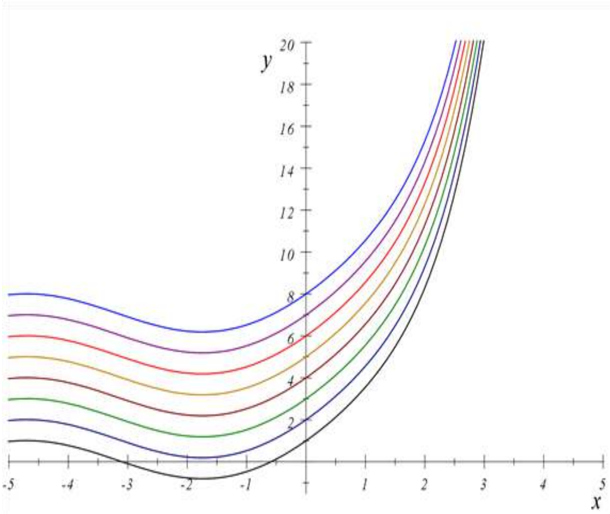
Valamely adott függvény határozatlan integrálja minden olyan függvény, amelynek deriváltja az adott függvény.

Def: Ha az F(x) függvény differenciálható minden x ∈ $]a;b[$–on és F'(x) = f(x) minden x ∈ $]a;b[$-re, akkor az F(x) függvényt az f(x) függvény **primitív függvényének** vagy antideriváltjának nevezzük.

Az integrálszámítás alaptétele: Ha F(x) primitív függvénye f(x)-nek, akkor f(x) összes primitív függvénye **F(x) + c** alakú, ahol **c** ∈ **R**

Def**:** Az F(x) függvény összes primitív függvényeinek halmazát az f(x) függvény **határozatlan integráljának** nevezzük.

Jele: $\int \boldsymbol{f(x)dx}$-szel jelöljük



2. Alapintegrálok

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ \text{ha } n \neq 1$	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C$
$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arcctg} x + C$

3. Határozott-integrál

Def: Ha az $[a;b]$-on értelmezett korlátos f(x) függvénynek bármely, minden határon túl finomodó felosztássorozatához tartozó alsó és felső összegei sorozatának közös határértéke van, röviden:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} S_n,$$

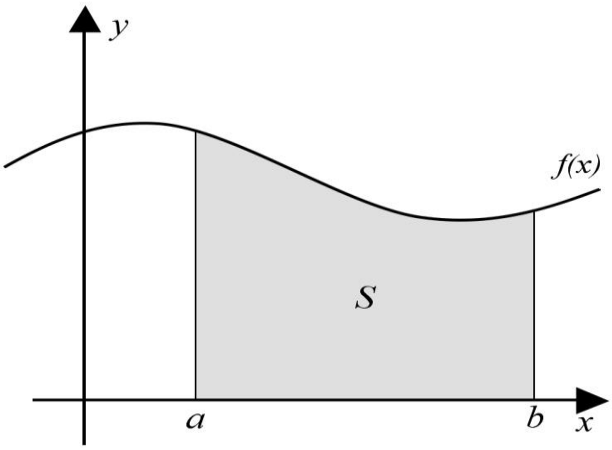
akkor az f(x) az $[a;b]$-on Riemann szerint integrálható. Ezt a közös határértéket az f(x) függvény $[a;b]$-on vett **határozott integráljának** nevezzük.

Jele: $\int_a^b f(x)dx$

4. Newton-Leibniz-tétel

Def: Ha az f(x) Riemann-integrálható az $[a;b]$-on és f-nek létezik F primitív függvénye ezen az intervallumon, akkor

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$



Az integrálszámítás alkalmazása

- A fizikában számos mennyiség között van integrális kapcsolat:
  - a mozgás gyorsulásának idő szerinti integrálja az elért sebességváltozás
  - a sebességé a megtett út
  - az erőé az impulzus
  - az erő út szerinti integrálja a munka
  - a gázok állapotváltozása során a nyomás a térfogat szerinti integrálja a tágulási munka stb.
- Sokszögek és másféle síkidomok területének kiszámítása
- Térfogat-és felszínszámítás
- Ívhossz-számítás (pl.forgástestek)
- Síkidom súlypontjának koordinátái integrállal, kapcsolat a síkidom területével
- Hidrosztatikai nyomóerő, tehetetlenségi nyomaték kiszámítása
- A közgazdaságtanban: termelési függvény meghatározása