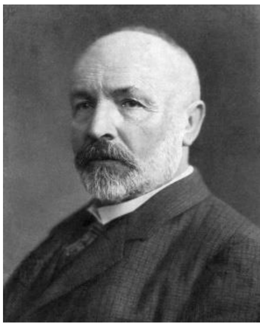
HALMAZOK, HALMAZMŰVELETEK, SZÁMHALMAZOK

Történeti vonatkozások

Bernard Bolzano

A halmaz fogalom először a német *Bernard Bolzano* (1781-1848) 1851-ben (már halála után) megjelent művében tűnt fel. A következő évtizedekben a szintén német *Richard Dedekind* (1831-1916) és *Georg Cantor* (1845-1918) dolgozták ki egyre részletesebben az elméletet, elsősorban függvénytani alkalmazásra és a „végtelen" fogalmának tisztázására. A halmazelmélet cantori szemlélete szerint tetszőleges T tulajdonság egy olyan halmazt határoz meg, mely azokat az elemeket tartalmazza, melyekre T teljesül. Ez a komprehenzivitási elv, mely azonban a naiv halmazelmélet javíthatatlan hibáinak forrásává vált. A naiv halmazelméletben ugyanis Bertrand Russell 1904-ben (és ezzel egy időben sokan mások is, például maga Cantor) ellentmondást, úgynevezett antinómiát fedezett fel (lásd: Russell-paradoxon). Mivel közben az is kiderült, hogy a matematika csaknem teljesen a halmazelméletre alapozható, ezért ezek az ellentmondások az egész matematika számára is problémát jelentettek. Legelőször Zermelo végzett eredményes kutatásokat az említett ellentmondások kiküszöbölésére. Zermelo vizsgálatait Fraenkel bővítette – kialakítva az úgynevezett Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszert. Más halmazelméleti axiómarendszereket is alkottak (például a Neumann–Bernays–Gödel-halmazelmélet), melyek nagyban hozzájárultak a modern halmazelméleti kutatások eredményességéhez. Így tehát megszületett a halmazelmélet axiomatikus felépítése; több párhuzamos axióma-rendszer létezésével.

Richard Dedekind



Gorge Cantor

Neumann János

Halmazok

A halmaz és a halmazhoz tartozás alapfogalom, fogalmát szemléletből fogadjuk el.

Ha egy dolog valamely halmazhoz tartozik, akkor azt mondjuk, hogy eleme ennek a halmaznak.
Jelekkel: $b \in H$; $c \notin H$ (b eleme a H halmaznak, c nem eleme a H halmaznak).

Egy halmazzal kapcsolatban megköveteljük, hogy minden objektumról *egyértelműen* eldönthető legyen, hogy a halmazhoz tartozik-e, vagy sem.

A halmazokat nagybetűvel jelöljük (A, B stb.).
Megadhatjuk őket:

- elemeinek felsorolásával $A = \{a; b; c\}$
- tulajdonságaival (pl. B a páros számok halmaza)
- Venn – diagrammal

Két nevezetes halmaz:

- üres halmaz: amelynek egyetlen eleme sincs $\emptyset$ vagy { }
- alaphalmaz: amely egy adott helyzetben, feladatban a szóba jöhető megengedett, megadott összes elemet tartalmazza   U
  Megjegyzés:
  $\{\emptyset\}$ üres halmazt tartalmazó egyelemű halmaz
  $\{0\}$ a nullát tartalmazó egyelemű halmaz

Számhalmazok

N: természetes számok halmaza $\{0;1;2;\ldots;+\infty\}$
Z: egész számok halmaza $\{\pm1;0;\pm2;\ldots\}$
Z^{+}: pozítív egész számok halmaza $\{1;2;3;\ldots;+\infty\}$
Q: racionális számok halmaza $\{x \mid x = \frac{a}{b};\ b = 0\}$
Q*: irracionális számok halmaza $\{\sqrt{2};\pi;e\}$
R: valós számok halmaza $Q \cup Q^*$

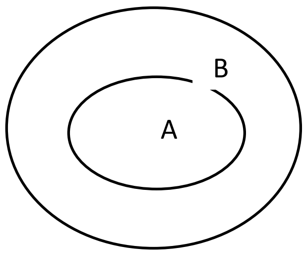
A halmaz *véges*, ha elemeinek számát egy természetes számmal megadhatjuk. Egy halmaz *végtelen*, ha elemeinek számát nem tudjuk megadni egy természetes számmal.

1. Kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesíthető a természetes szám és annak bármely részhalmaza közt.
2. Mindazokat a halmazokat, amelyeknek ugyanannyi elemük van, mint a természetes számoknak, megszámlálhatóan végtelennek nevezzük
3. A racionális számok is megszámlálhatóan végtelenek.
4. Léteznek nem megszámlálható, de végtelen halmazok, pl. az egyenes pontjai

Halmazrelációk

1. *Egyenlőség*
   Def: Két halmaz akkor és csakis akkor egyenlő, ha ugyanazok az elemei.

2. *Részhalmaz*
   Def: Ha az A halmaz minden eleme a B halmaznak is eleme, akkor azt mondjuk, hogy az A halmaz részhalmaza a B halmaznak.
   Jele: $A \subset B := \{a \mid \forall a \in A \Rightarrow a \in B\}$



3. *Valódi részhalmaz*
   Def: A valódi részhalmaza B-nek, ha A részhalmaza B-nek, de a B halmaznak van olyan eleme, amely A-nak nem eleme
   Jele: $A \subseteq B := \{A \subseteq B \wedge a \notin B\}$

Részhalmaz tulajdonságai

1. Minden halmaz része önmagának: **reflexív** $A \subset A$
2. Az üres halmaz minden halmaznak részhalmaza $\{\} \subset A$
3. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$: **tranzitív**
4. $A \subset B \wedge B \subset A \Rightarrow A = B$: **antiszimmetria**

Halmazműveletek, műveleti tulajdonságok

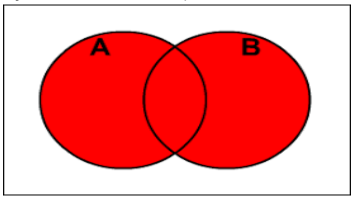
1. *Unió*

Def: Az A és a B halmaz egyesítésén(unióján) azt a halmazt értjük, amely legalább az egyik halmaznak eleme.

Jele: $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Tulajdonságai:

1. $A \cup B = B \cup A$ **kommutatív** (felcserélhető)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **asszociatív** (csoportosítható)
3. $A \cup \emptyset = A$
4. $A \cup A = A$
5. $A \cup H = H$ H: alaphalmaz



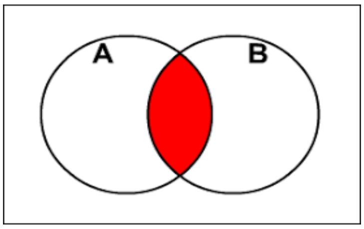
2. *Metszet*

Def: Két halmaz metszete mindazon elemek halmaza, amelyek mindkét halmaznak elemei

Jele: $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Tulajdonságai:

1. $A \cap B = B \cap A$ **kommutatív**
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ **asszociatív**
3. $A \cap \{\,\} = \{\,\}$
4. $A \cap H = A$
5. $A \cap A = A$
6. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ **disztributív** (tagolható)



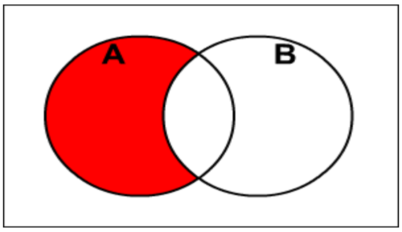
3. *Különbségképzés*

Def: A és B halmaz különbsége az A halmaz mindazon elemeinek halmaza, amelyek A-ban benne vannak, de nincsenek a B-ben.

Jele: $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Tulajdonságai:

1. $A \setminus B \neq B \setminus A$ **nem kommutatív**
2. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$ **nem asszociatív**
3. $A \setminus A = \{\,\}$
4. $A \setminus \emptyset = A$
5. $H \setminus A = A$



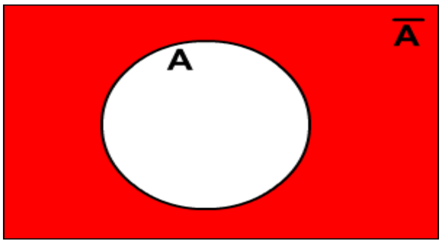
4. *Komplementer*

Def: H ⊂ A Egy alaphalmaznak legyen része az A halmaz. Az A komplementerének nevezzük az alaphalmaz azon elemeinek halmazát, amelyek az A halmaznak nem elemei.

Jele: $\overline{A}_H$:= {x|x∈A⊂H ∧ x ∉ B}

Tulajdonságai:

1. $\overline{\overline{A}} = A$
2. $\overline{H} = \{\,\}$
3. $\overline{\emptyset} = H$



5. *De Morgan – azonosságok*

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

6. *Halmazok számossága*

Def*:* A halmaz elemeinek száma megmutatja, hogy hány elemű a halmaz.

Jele: $|A|$

7. *Diszjunkt halmaz*

Def: Két halmaz diszjunkt, ha metszetük üres

8. *Szimmetrikus differencia*

Jele: A ∆ B := {x|x∈ (A \ B) ∪ (B \ A) }

Tulajdonságai:

1. A∆B = B∆A **kommutatív**
2. A∆(B∆C) = (A∆B)∆C **asszociatív**
3. A∆∅ = A
4. A∆A = ∅

9. *Descartes – szorzat*

Def: Azoknak a rendezett elempároknak (a;b) a halmazát amelyeknek az első komponense eleme az A-nak, második pedig eleme a B-nek, az A és a B halmaz
Descartes-féle szorzatának nevezzük.

Jele: A x B := { (a,b) | a∈A ∧ b∈B }

Permanencia - elv

Def: Ha egy műveletet már definiáltunk egy számkörben, akkor az új (bővebb) számkörre való definiálást úgy kell végrehajtani, hogy a szűkebb számkörben érvényes azonosságok a bővebb számkörben is érvényben maradjanak.

Logikai szita

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Kapcsolat a logikával

Tulajdonság	Kijelentés	Halmaz	Események
kommutatív (felcserélhető)	$A \wedge B = B \wedge A$ $A \vee B = B \vee A$	$A \cap B = A \cap B$ $A \cup B = A \cup B$	$A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$
asszociatív (csoportosítható)	$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$ $A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ $A + (B + C) = (A + B) + C$
disztributív	$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cup C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
De Morgan azonosság	$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$ $\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

Alkalmazások

- Valamely függvény megadásához két halmazra és egy utasításra van szükségünk. Az egyik halmaz (az értelmezési tartomány) minden egyes eleméhez hozzárendeljük az utasításnak megfelelően a másik halmaz egy-egy elemét. Ezt a második halmazt a függvény egy képhalmazának nevezzük. A képhalmaznak azok az elemei, amelyek a hozzárendelésben szerepelnek, alkotják a függvény értékkészletét. Az értékkészlet tehát részhalmaza a képhalmaznak.
- Egyenlet, egyenlőtlenség, egyenletrendszer alaphalmaza, megoldáshalmaza
- Adott tulajdonságú pontok halmazai
- Síkidomok, testek definiálása, osztályozása
- Kör és egyenes helyzete
- Tengelyes tükrözés, síkra való tükrözés
- Háromszögek hozzáírt körei
- Síkidomok alkotórészeinek, kerületének, területének kiszámítása
- Testek alkotórészeinek, felszínének, térfogatának kiszámítása
- Vektorok
- Biológia: rendszertani kategorizálás
- Lehet, bele se gondoltunk eddig, de akárki akármivel foglalkozik, halmazokban gondolkozik. A boltban nem összevissza vannak az áruk pakolva, hanem értelmes részhalmazokra bontva (élelmiszer,tisztítószer, autóalkatrész,...). A programnyelvek objektumorientáltak, vagy nem. Az iskolaiérdemjegy egy 5 elemű halmazból kerül ki.
- Minden területen, mindenféle kategóriába sorolás halmazelméleti feladat. Ujjlenyomat keresése adatbázisban, telefonszám keresése telefonkönyvben, ... - ez mind olyan probléma, mely arra vezethető vissza, hogy egy adott objektum eleme-e egy halmaznak. Gyakorlatban a halmazokon már értelmezve van valami sorrendiségi reláció, így már nem pusztán matematikai halmazokról beszélhetünk, ahol a halmaz elemeinek sorrendje nem számít