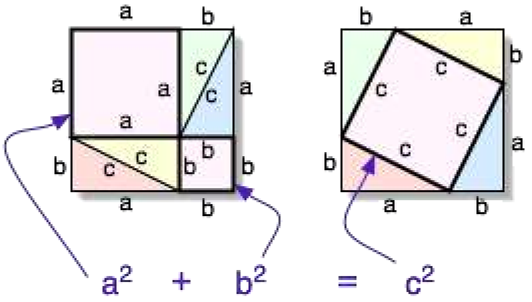
A geometria szintetikus és analitikus fejlődése

A geometria születése a társadalom szükségleteiből fakadt, különböző gazdasági jelentőségű feladatok tették szükségessé az egyre magasabb szintre történő fejlesztését. (Az elnevezése is ezt jelzi, a görög eredetű geometria szó földmérést jelent.) Eleinte tapasztalati szabályok alkották a megszerzett tudást, ezek egy része durva, közelítő jellegű volt. A megfelelő mennyiségű tapasztalati úton szerzett ismeret megszerzése után az ókori görögök már a különböző állítások között tudatosan kerestek logikai összefüggéseket, kapcsolatokat, a különböző szabályokat elméleti úton vezették le.

Az ókori matematika enciklopédiája, *Euklidész: Elemek* című híres munkája axiómákból vezeti le, rendszerezi az addig összegyűjtött ismeretanyagot. A szintetikus geometriai módszerére jellemző az intuitív gondolkodás, a feladatok megoldásában pedig a sziporkázó ötletesség. A szintetikus geometria ezen területét a szakirodalom elemi geometria néven tartja számon. Másik ága a projektív geometria, amelynek bizonyos elemeit már ismerték Euklidész matematikus kortársai is. A kezdetben alkalmazott módszer szintetikus volt, hiszen csak geometriai fogalmakat vettek igénybe, ugyanis *Fermat és Descartes* megjelenéséig a geometriában nem alkalmaztak következetesen algebrai módszereket. A projektív geometria alapjai a szintetikus geometria keretein belül születtek meg. A projektív geometria kialakulását azok a megfigyelések segítették elő, amelyek a képzőművészetben a térbeli alakzatok perspektivikus ábrázolásával kapcsolatban keletkeztek. Az ókori geometria projektív elemeinek életre keltése és kibővítése *Desargues* nevéhez fűződik. A geometria ezen ága a geometriai alakzatoknak olyan tulajdonságaival foglalkozik, amelyek centrális vetítéskor és egyenessel, illetve síkkal való metszéskor változatlanok maradnak. Időközben az analitikus módszer térhódításának köszönhetően a projektív geometria tételeinek egy részét már koordinátás módszer segítségével is bizonyították. A szintetikus geometria körébe azonban a projektív geometria csak azon területe esik, amely nem használja fel a koordináta-rendszert a tételek bizonyításához. A projektív geometriai feladatok sok ötletet kívánnak, alkalmazásuknál fogva is igen érdekesek. A XIX. században folytatódott a projektív geometria fejlődése, és *Monge* francia matematikus megalapozta az ábrázoló geometriát a projektív geometria új ágaként. A következő forradalmian új gondolat a kapitalizmus kialakulásának idejére tehető.

Szintetikus geometria

A geometria tanításában 2000 éven át uralkodott a szintetikus módszer. Sok helyen a világon még nem is olyan régen Euklidész: Elemek című művét tanították az iskolában a matematika órákon. A szintetikus módszer alkalmazása kétségkívül fejleszti az intuitív gondolkodást, hiszen maga a módszer is éppen ezen alapul. Az intuitív gondolkodást általában meglehetősen nehéz fejleszteni és számonkérésével is komoly gondok vannak. A geometria szemléletességénél fogva vitathatatlanul alkalmas terület erre feladatra. Egy-egy tétel bizonyításához, feladat megoldásához feltétlenül szükség van az ötletességre. Az alábbi bizonyítás a sziporkázó ötletességet mutatja be, valamint rávilágít a szabatosság fontosságára is.



Pitagorasz tétel

A XVII. században indult el diadalútjára *Descartes és Fermat* munkássága nyomán az analitikus geometria, mint a geometriai objektumok méreteinek, formáinak és egyéb tulajdonságainak számviszonyokkal történő kifejezési módszere. Elsőként történt meg a geometria és az algebra szerves összefonódása, következetes összekapcsolása a matematika történetében. Descartes használta először a koordináta-rendszert, ami a geometriai feladatok algebrai megoldását tette lehetővé, így lényegében általános módszert adott a feladatok megoldására. Ez volt az analitikus módszer fénykorának a kezdete. A XIX. század elejére az analitikus geometria képes volt minden, egyenlettel leírható geometriai alakzat vizsgálatára. Az ír *Hamilton* és a német *Grassmann* felfedezéseinek köszönhetően új fogalmak formálták tovább az analitikus geometriát. Kialakult a vektor fogalma, amely a matematikán kívül más szaktudományokban is (fizikában, közgazdaságtanban) hatékony segédeszköznek bizonyult.

Forradalmi változást jelentett a geometriák fejlődésében a párhuzamossági problémakör megoldása, a nem euklidészi geometria megalkotása, amelyet *Bolyai János* szintetikus, *Lobacsevszkij* pedig analitikus úton oldott meg. Ezzel előtérbe került az axiómarendszerek vizsgálata, ami egyben a geometria alapjait érintő új gondolkodási formát is jelentette. Ennek az ún. axiomatikus módszernek a kidolgozása *Hilbert* nevéhez fűződik. Hilbert a Bolyai és Lobacsevszkij által nyitott új korszakot lezáró, az 1899-ben kiadott A geometria alapjai című művében a geometria axiómákra épült, rendszerezett tárgyalását adja, és a XIX. század minden geometriai vívmányát tartalmazza. Az axiomatikus geometria számos nem vitatható előnye mellett, egy igen nagy hátránnyal rendelkezik. Egy axiómarendszer felvétele tulajdonképpen meghatározza az igaz tételek halmazát, amelyekhez esetenként többféle logikai úton is el lehet jutni, de a logikai út keresésére semmilyen információt, módszert nem ad.

Analitikus geometria

Az analitikus módszer alkalmazásával következetesen összefonódik a geometria és az algebra. A matematika e két látszólag távol álló fejezetének összekapcsolása varázserővel bír. Az ötleteket igénylő geometriai szerkesztési, illetve bizonyítási feladatok az analitikus módszer következtében szisztematikusan egyenletek felírására és megoldására, illetve algebrai azonosságok igazolására redukálódnak. A feladatmegoldások jól algoritmizálhatóak, néhány mechanizmus elsajátításával már eredményesen lehet dolgozni. Jó példa erre egy csúcspont koordinátáinak meghatározása.

A, B és C egy szabályos háromszög pontjai. Ha A (a_1, a_2) és B (b_1, b_2), akkor C milyen koordinátájú lesz?

$$F\left(\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2}\right)$$

$$\vec{v}\left(\frac{b_1-a_1}{2}, \frac{b_2-a_2}{2}\right)$$

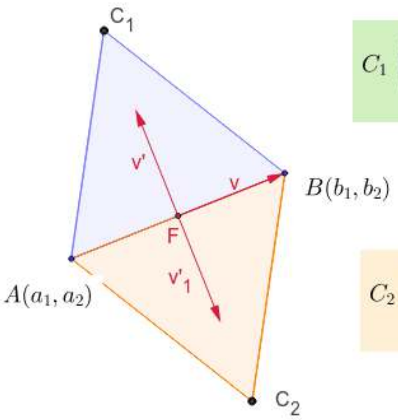
A $\vec{v}$-ra merőlegesek:

$$\vec{v}\,'\left(\frac{a_2-b_2}{2}, \frac{b_1-a_1}{2}\right)$$

$$\vec{v}_1'\left(\frac{b_2-a_2}{2}, \frac{a_1-b_1}{2}\right)$$

$$C_1 = F + \sqrt{3}\cdot\vec{v}\,'$$

$$C_1\left(\frac{a_1+b_1+\sqrt{3}\cdot(a_2-b_2)}{2}, \frac{a_2+b_2+\sqrt{3}\cdot(b_1-a_1)}{2}\right)$$



$$C_2 = F + \sqrt{3}\cdot\vec{v}_1\,'$$

$$C_2\left(\frac{a_1+b_1+\sqrt{3}\cdot(b_2-a_2)}{2}, \frac{a_2+b_2+\sqrt{3}\cdot(a_1-b_1)}{2}\right)$$

Matematikatörténeti vonatkozások

- **Gérard Desargues** (1593-1662). Lyonban született. Építész- és hadmérnök volt. 1626 és 1650 között Párizsban matematikával és fizikával foglalkozott. 1635-ben már a párizsi Akadémia tagja lett. Új nézeteket képviselt, amelyeket kortársai általában nem méltányoltak. Azzal, hogy az ókori geometria projektív elemeit életre keltette és kibővítette, megtalálta a geometriai kutatás egyik általános módszerét, megteremtve ezzel a szintetikus geometria projektív

geometriának nevezett, sok ötletet kívánó, de éppen ezért igen érdekes ágát. Bevezette az egyenes végtelen távoli pontjának és a sík végtelen távoli egyenesének a fogalmát. Velük kapcsolatban - többek között - a következő megállapítást tette: A párhuzamos egyenesek közös síkjuknak egyik végtelen távoli pontjában metszik egymást.

- **Blaise Pascal** (1623-1662), francia matematikus, fizikus és filozófus. Szülőhelye Clermont-Ferrand, ahol matematikus apja törvényszéki elnök volt. A 14 éves Blaise apjával együtt eljárt a Mersenne körül csoportosult természettudományos körbe, amelyből 1666-ban kinőtt a Párizsi Tudományos Akadémia. Itt ismerkedett meg Desargues eszméivel. Ezek hatása alatt jelent meg 16 éves korában, tehát 1640-ben első műve. Ez a Pascal-tételt tartalmazó 6 oldal kitörölhetetlen nyomot hagyott a projektív geometria történetében. A tétel azt mondja ki, hogy egy kúpszeletbe rajzolt húrhatszög szembeni oldalainak egyenesei egy-egy pontban metszik egymást, és ezen három metszéspont mindig egyazon egyenesen van. Később kidolgozta tételének számos következményét is, és néhány azon alapuló szerkesztési eljárást is bemutatott. Annak ellenére, hogy munkássága a projektív geometria fejlődését jelentősen előre vitte, nem maradt meg ezen a területen.

- **Gaspard Monge** (1746-1818), francia matematikus. A Dijontól délre eső Beaune városkában született. A francia forradalom után tengerészeti miniszter és hadügyi szervező volt. Részt vett az új mértékegység-rendszer kidolgozásában. A méziéres-i katonai iskola tanáraként (1768-1789) tanított matematikát, fizikát és erődítéstant. Ekkor alapozta meg az ábrázoló geometriát, a projektív geometria új ágaként. Az akkori előadásait foglalja össze az 1794-1795-ben kiadott könyve.

- **Lazare Nicolas Carnot** (1753-1823). A francia burgundiai Nolayben született. Államférfi, a „győzelem szervezője" büszke cím viselője és matematikus volt. A kitüntető címet azért kapta, mert a jakobinusok idején szétzüllött hadsereget újra megszervezte, és győzelemre vezető haditerveket dolgozott ki. Ő volt a fizikus Sadi Carnot apja és a kémikus Adolphe Carnot nagyapja. Napóleon bukása után Magdeburgba menekült, ami a matematikára nézve, hasznos volt, mivel visszavonulásában csak ezzel foglalkozott, mégpedig eredményesen. Kutatási területe az analízis és a geometria volt. A projektív geometria további kibontakozásához nagyban hozzájárultak művei. Mindegyikre jellemző az általánosításra való törekvés. Euklidész legtöbb tételéről kimutatta, hogy azok átfogóbb tételek speciális esetei. Erre szép példa a koszinusztétel általánosítása.

- **Charles Julién Brianchon** (1783-1864) volt. Sévresben, Párizs elővárosában született. Tüzértiszt, majd tanár lett. 21 éves korában felelevenítette a Pascal-tételt, és egy ahhoz nagyon hasonlót, a róla elnevezett Brianchon-tételt fedezte fel. Tétele szerint: egy kúpszelet köré írható érintőhatszög átellenes végpontjait össze kötő átlók egy pontban metszik egymást. Amint később, a dualitás elvének felfedezése után kiderült, a Brianchon-tétel a Pascal-tétel duálja, tehát nem tudatosan ugyan, de tételével a projektív geometria egy fontos és igen termékeny alapelvét demonstrálta. Az áttekintett előzmények után következett az átfogó megalapozás, a projektív geometria egységes rendszerének a megalkotása.

- **Jean-Victor Poncelet** (1788-1867) francia matematikus. Metzben született, a Politechnikai Főiskolán végzett, majd 1825-től 1835-ig szülővárosában tanított, aztán magas katonai beosztásba került. 1838-tól 10 éven át a Sorbonne-on a fizika és a mechanika professzora volt, végül 1848-tól a Politechnikai Főiskola igazgatójaként működött. 32 éves korában jelent meg egy folyóiratban közös cikke Brianchonnal, vizsgálatok egy egyenlő oldalú hiperbola meghatározásáról címen, amelyben napvilágot látott a középiskolából ismert kilencpontú körnek, azaz a Feuerbach-körnek a leírása, amely szerint minden háromszögben a magasságok három talppontja, a 3 oldalfelező pont és a magasságpontot a csúcsokkal összekötő szakaszok 3 felezőpontja egy körön van.

- **Karl Wilhelm Feuerbach** (1800-1834), erlangeni gimnáziumi tanár Jénában született, és testvére volt a filozófus Ludwig Feuerbachnak. A róla elnevezett kör meghatározását az 1822-ben megjelent könyve tartalmazza. A kört ugyan nem ő fedezte fel, de művében a kör számos új tulajdonságát mutatta ki, többek között azt, amely egyes vélemények szerint Euklidész óta a geometria legszebb tétele, és kimondja, hogy a Feuerbach-kör érinti a háromszög oldalait belülről érintő kört és a kívülről érintő három kört is. Így a kilencpontú körre a háromszög 13 nevezetes pontja illeszkedik. Feuerbach határozta meg a kör sugarát is, és azt, hogy centruma felezőpontja az Euler-egyenes azon szakaszának, amely a magasságpont és a körülírható kör középpontja között van.

- **Jacob Steiner** (1796-1863). Apja svájci pásztor, tanítója Pestalozzi, híres pedagógus volt. Egy ideig Steiner is tanított Pestalozzi intézetében, aztán tovább folytatta egyetemi tanulmányait Heidelbergben. Itt ismerkedett meg a francia geometriai áramlatokkal. Az egyetem után Berlinbe csábították, ahol kiváló eredménnyel tanított és közben geometriai kutatásokat végzett. Fő munkáját 1832-ben adta ki A geometriai alakzatok összefüggésének rendszeres kifejtése címen. Fokozatosan jutott el az elemi geometriától a projektív geometria majdnem teljesen szintetikus felépítéséhez. Egyik alapvető tétele szerint minden kúpszelet pontjai olyan, projektív viszonyban álló két sugársor megfelelő egyeneseinek metszéspontjaiként tekinthetők, amely sugársorok tartói maguk is a kúpszelet pontjai.

- **Michel Chasles** (1793-1880) francia matematikus. Épernayben született, a Politechnikai Főiskolán végzett. 1846-tól a Sorbonne professzora volt. Matematikatörténettel is foglalkozott, ezt mutatja az 1837-ben megjelent A matematika főbb ágainak fejlődése című könyve. Ebben olyan projektív geometriai eredményeket sorol fel, amelyet már az ógörög matematikusok is ismertek.

- **Christian Von Staudt** (1798-1867), rothenburgi születésű német matematikaprofesszor. Gauss tanítványa volt. Először a würzburgi egyetemen, aztán a nürnbergi politechnikumban, majd 1835-től az erlangeni egyetemen tanított. Erlangenben írta és Nürnbergben adta ki 1847-ben A helyzet geometriája című könyvét. Ebben és ennek kiegészítéseiben sikerült kiküszöbölnie a projektív geometriából az egyetlen nem tisztán geometriai elemet azáltal, hogy a kettősviszony helyett bevezette annak egy speciális, megszerkeszthető alakját: a harmonikus pontnégyes, illetve a harmonikus sugárnégyes fogalmát.

- **Arthur Cayley** (1821-1895), a richmondi születésű matematikus. Az egyetemet Cambridge-ben végezte el a jogi karon, ahol

- 20 évi ügyvédeskedés után - 1863-tól a matematika professzora
lett. A munkásságát átfogó 13 kötetes kiadás igen sokrétű érdeklődésről tanúskodik. Az algebrai geometriában megadta a geometriai
értelmezését az első- és a másodfokú n ismeretlenű egyenletrendszernek. A projektív geometriának azt az ágát művelte, amely nem tisztán
szintetikus, hanem analitikus módszereket is használ.

- **René Descartes Du Perron** (1596-1650). Magas rangú bíró gyermekeként született a francia La Haye-ben. A gazdag fantáziájú, éles eszű fiú sok mindent tanult, de elég rendszertelenül. Tanulmányai közül a matematikát becsülte a legtöbbre, mint olyat, amely kényszerítő erejű igazságokat közöl. 17 évesen elutazott Poitiers-be, hogy jogot tanuljon. A tudományok és főleg a matematika iránti érdeklődését ébren tartotta volt iskolatársa, aki később Európa tudományos hírközpontjává nőtte ki magát.

- **Pierre Fermat** (1601-1665). Korának legnagyobb francia matematikusa jogász volt, és csak „műkedvelő módon", szabad idejében foglalkozott matematikával. A Toulouse melletti Beaumont de Lomagne-ban született. Jogot tanult Toulouse-ban, és 1631-től ugyanitt a parlament tanácsosaként dolgozott. Az ő korában vált divattá az elveszett ókori klasszikusok rekonstruálása. Fermat is matematikai tanulmányait az ógörög művek olvasásával kezdte. Apollóniosz tanulmányozása közben fedezte fel az analitikus geometria egyik alapvető elvét, hogy a kétismeretlenes egyenlet valamilyen vonalat jelenthet, egyenest vagy görbét. Rájött, hogy az Oresme-féle koordináta-rendszer és az algebrai jelölések birtokában az apollónioszi kúpszeletelmélet sokkal áttekinthetőbb, és azért a további eredmények elérésére is alkalmasabb formában fejezhető ki.

- **John Wallis** (1616-1703) angol matematikusnak A végtelenek aritmetikája című, 1655-ben megjelent fő művét kell kézbe vennünk, amely magába foglalja a kúpszeletekre vonatkozó ismereteket Wallis Ashfordban született, és Cambridge-ben teológiát végzett. Ő az első tudós, aki angol földön az analízis apostola lett. 1649-től Oxfordban geometriát tanított. Cromwell után királyi udvari káplánná nevezték ki. 1660-ban egyik alapító tagja és szervezője volt a londoni Royal Societynek. Jól ismerte Torricelli és Descartes munkáit, a kúpszeletek tárgyalásának új módja éppen a descartes-i analitikus geometria módszere volt. Ezt a területet továbbfejlesztette azzal, hogy bevezette a kúpszeletek közös egyenletét.

- **Jan Witt** (1625-1672), a Dordrechtben született holland matematikus, aki politikai tevékenységei közepette is tudott időt találni A görbe vonalak elemei megírására. Ez az első rendszeres analitikus geometriai kézikönyv. Első részében inkább szintetikus módszerrel, valamint kinematikai úton adta meg a kúpszeletek definícióit. (Tőle származik a direktrix szó és az a meghatározás, hogy a parabola a sík azon pontjainak az összessége, amelyek a fókusztól és a direktrixtől egyenlő távolságra vannak.) Könyvének második része analitikus geometria. Ebben is szerepel a három kúpszelet közös egyenlete.

- **Philippe De Lahire** (1640-1718), a Collége de Francé matematika és építész professzora. Jelentős továbblépésként elsőnek írta fel egy felület egyenletét, vagyis a sík analitikus geometriájából kilépett a térbe. Még mindig csak a kezdőponttal ellátott egyetlen tengelyt használta, és csak a pozitív koordinátákat vette figyelembe. Az origó csúcsú, abszcissza tengelyű kúpfelületnek az egyenletét írta fel.

A geometria hétköznapi alkalmazásai

- Földmérésben
- Térképészetben
- Csillagászatban mért adatokból távolságok és szögek kiszámolása
- Terepfeladatok megoldásánál: megközelíthetetlen pontok helyének meghatározása
- Modern helymeghatározás: GPS
- Optikai lencsék
- Aranymetszés
- Az építészetben a szimmetriákat, a szabályos sokszögeket gyakran alkalmazzák statisztikai és esztétikai szempontok miatt

Források:

- The importance of Mathematics in the developement of Science an Technology by Juan Luis Vazquez
  http://verso.mat.uam.es/~juanluis.vazquez/reptmath.pdf
- Michel Chasles: A matematika főbb ágainak fejlődése https://mek.oszk.hu/05000/05052/pdf/07_sain_539-662.pdf
- Branches of Maths: Geometry,Trigonometry
  https://byjus.com/maths/geometry/
- Filep László: A tudományok királynője
- The Tower of Math: Branches of Mathematics
  https://science.howstuffworks.com/math-concepts/math3.htm
- Fatalin Lászlóne : Kaleidoszkóp a matematika tanításáról
  http://misc.bibl.u-szeged.hu/43954/